УДК 16+81.42

НЕЧЕТКАЯ ТЕОРИЯ ТИПОВ В АНАЛИЗЕ АРГУМЕНТАЦИИ

О. А. Доманов
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
odomanov@gmail.com

Аннотация. В статье описан нечеткий вариант интуиционистской теории типов П. Мартин-Лёфа, представляющий собой расширение последней с помощью операций и понятий нечеткой логики. Представлен обзор правил нечеткой теории типов и пример ее применения к анализу убедительности аргументации. При этом истинностные значения нечеткой логики интерпретируются как степени убедительности утверждений и аргументов. Формализация реализована в системе Agda.

Ключевые слова: теория аргументации, теория типов, нечеткая логика.

Для цитирования: Доманов, О. А. (2021). Нечеткая теория типов в анализе аргументации. *Respublica Literaria*. Т. 2. № 1. С. 37-47. DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.37-47.

FUZZY TYPE THEORY IN THE ANALYSIS OF ARGUMENTATION

O. A. Domanov
Institute of philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
odomanov@gmail.com

Abstract. The article deals with a fazzy variant of P. Martin-Löf's intuitionistic type theory. It presents the overview of fuzzy type theory rules and an example of its application to the analysis of the persuasiveness of argumentation. In the latter, the truth values of fuzzy logic are interpreted as degrees of persuasiveness of statements and arguments. The formalization is implemented in the proof assistant Agda.

Keywords: theory of argumentation, type theory, fuzzy logic.

For citation: Domanov, O. A. (2021). Fuzzy Type Theory in the Analysis of Argumentation. *Respublica Literaria*. Vol. 2. no. 1. pp. 37-47, DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.37-47.

При анализе сложных аргументов часто требуется оценка убедительности рассуждений, не сводящаяся к простой бинарной логике: утверждения могут быть более или менее убедительны, и аргументация нацелена на повышение или понижение этой убедительности. Одним из распространенных инструментов работы в таких ситуациях является нечеткая логика [Заде, 1976; Hájek, 1998]. При этом, однако, используются расширения логики первого порядка или сходных систем. Вместе с тем, по-видимому, более близким и естественным подходом является теоретико-доказательственный. Действительно, аргументы можно рассматривать как доказательства, а степени их убедительности — как степени истинности. Тогда сеть взаимосвязанных аргументов становится подобной дереву вывода, в котором правила могут быть нестрогими и направленными на повышение или понижение убедительности утверждения для той или иной аудитории. В этом смысле, анализ аргументативных

[*]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-00-01376 (18-00-00760).

сетей тяготеет к интуиционистской, и шире, конструктивистской логике, в которой истинность определяется через доказательство. Данная статья представляет вариант интуиционистской теории типов с нечеткими истинностными значениями, интерпретируемыми как степени убедительности. Она представляет собой нечеткий вариант теории типов П. Мартин-Лёфа [Martin-Löf, 1984].

Формализацию в Agda можно найти по адресу: `https://github.com/odomanov/ttsemantics/tree/master/Agda/FuzzyTT`.

Аргументы и суждения

В основе нашей формализации лежит понятие суждения. Суждения утверждаются (или отвергаются) с той или иной степенью убедительности для той или иной аудитории. Суждения следует отличать от пропозиций или высказываний. Суждение есть констатация (факта) знания, тогда как пропозиции относятся к содержанию знания. В теории типов пропозиции являются типами, а именно типами (или множествами) своих доказательств. Запись $a : A$ означает «a относится к типу A» или «a является элементом (или термом) типа A». В частном случае пропозиции она также означает «a является доказательством пропозиции A». Эта запись обозначает одно из важнейших типов атомарных суждений (о типах суждений см. ниже). Вынося суждение $a : A$ мы выражаем знание о том, что имеется доказательство пропозиции A и a является этим доказательством. Более общей формой суждения является гипотетическое суждение $\Gamma \vdash J$, означающее: «В контексте Γ известно, что J». Здесь J — атомарное суждение, а Γ — контекст, позволяющий сформулировать (то есть понять) J и вынести его в качестве суждения. Как мы увидим ниже, контекст сам состоит из суждений и, в частности, может быть пустым.

Одним из важнейших отличий суждений от пропозиций состоит в том, что правила вывода связывают не пропозиции, а суждения и имеют вид

$$\frac{\Gamma_1 \vdash J_1 \qquad \dots \qquad \Gamma_n \vdash J_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash J}.$$

Это правило означает: «Если имеется знание — то есть могут быть вынесены (в соответствующих контекстах) суждения — $J_1, \dots, J_n$, то можно сделать вывод — то есть вынести (в объединенном контексте) суждение — J». Мы далее будем представлять аргументацию в терминах правил вывода. Аргумент в этом смысле является схемой, позволяющей от убежденности в $J_1, \dots, J_n$ переходить к убежденности в J. При этом убедительность будет иметь промежуточные значения помимо бинарных «полностью убежден» и «совершенно не убежден», измеряемые структурой, которую будем называть алгеброй убедительности или алгеброй степеней убедительности.

Алгебра (степеней) убедительности

В соответствие с общим подходом нечеткой логики [Заде, 1976; Hájek, 1998], алгебра убедительности представляет собой так называемую решетку с остатками (residuated lattice). Семантически, будем понимать ее как минимальную степень убедительности суждения, которую мы имеем основания ему приписать. Такое понимание позволяет, в частности, делать оценки при неполной информации: даже если не вся информация известна, мы в некоторых случаях можем дать нижнюю оценку убедительности. Такой подход — моделирование убедительности в терминах истинности — не является единственно возможным. См. обсуждение ниже.

Формально [Hájek, 1998, pp. 47 sqq.], алгебра убедительности это алгебра $\langle L, \wedge, \vee, \otimes \Rightarrow, \bot, \top \rangle$, где

- $\langle L, \wedge, \vee, \bot, \top \rangle$ — полная решетка с инфимумом $\wedge$, супремумом $\vee$, минимальным и максимальным элементами $\bot$ и $\top$; будем обозначать порядок решетки $\leqslant$;
- $\langle L, \otimes, \top \rangle$ — коммутативная полугруппа с единицей (моноид); это означает, что $\otimes$ является двуместной коммутативной и ассоциативной операцией, такой, что $x \otimes \top = x$ для любого x;
- для любых x, y, z можно определить двуместную операцию $\Rightarrow$, такую, что

$$z \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ тогда и только тогда, когда } x \otimes z \leqslant y.$$

Операция $\otimes$ называется t-нормой и является обобщением конъюнкции. Мы будем использовать ее для оценки убедительности выводов по правилам. Убедительность применима только к суждениям, и мы будем обозначать степень убедительности суждения J через $[\![J]\!]$. Тогда, если имеется правило

$$\frac{\Gamma \vdash J_1 \qquad \Delta \vdash J_2}{\Gamma, \Delta \vdash J},$$

то степень убедительности J будем вычислять как $[\![J]\!] = [\![J_1]\!] \otimes [\![J_2]\!]$. Это соотношение обобщается на случай n суждений.

Как операция на убедительности t-норма должна удовлетворять нескольким очень общим условиям:

- она коммутативна и ассоциативна;
- она неубывающая по обоим аргументам, то есть повышение убедительности любой посылки не должно приводить к понижению убедительности вывода;
- для любых x выполнены равенства: $x \otimes \bot = \bot$ и $x \otimes \top = x$.

Существует множество способов определить t-норму, из которых наиболее распространены три, определенные на единичном вещественном интервале $[0, 1]$:

- Норма Лукасевича: $x \otimes y = \max(0, x + y - 1)$.
- Норма Геделя: $x \otimes y = \min(x, y)$.
- Норма произведения: $x \otimes y = xy$.

Как видно из определения, степень импликации $x \Rightarrow y$ равна супремуму таких z, что $x \otimes z \leqslant y$. Как мы увидим ниже, это соответствует правилу modus ponens, если $\leqslant$ понимать как логический вывод, а $\Rightarrow$ — как импликацию. В нечеткой логике операция $\Rightarrow$ называется остатком (residuum). Она, в частности, участвует в вычислении обобщенного modus ponens как степень импликации [Заде, 1976, с. 131; Hájek, 1998, p. 170].

Суждения и правила вывода

Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы расширить теорию типов, добавив в нее оценку убедительности. Введем обозначения. Пусть $a \mid \alpha : A$ обозначает суждение «со степенью убедительности α можно утверждать, что a является элементом (термом) типа A». В случае пропозиций это означает: «a является доводом со степенью убедительности α в пользу пропозиции A». Степень будем также записывать как $[\![a : A]\!]$. Другими словами, если $a \mid \alpha : A$, то $\alpha = [\![a : A]\!]$. Здесь как a, так и A являются четкими, а нечеткость появляется только при отнесении объектов к типам, когда мы не вполне уверены в этом отнесении. При этом четкость типа относится к его определению, но не к его содержанию: в нашей формализации мы точно знаем, что из себя представляют типы и объекты, но не вполне уверены в том, какие именно объекты к какому именно типу относятся. Знание определения мы понимаем как знание отношения типа к другим типам, его поведения в формулах и т. д. Определение это символическая конструкция, которая должна иметь фиксированную форму. В итоге, мы всегда точно знаем определения типов и точно выделяем объекты, но не всегда точно можем определить, относятся ли объекты к этим типам. Например, мы можем иметь четкое определение города (через его роль в юридических отношениях и пр.) и четко выделять отдельные населенные пункты, но не всегда можем уверенно определить, является ли тот или иной населенный пункт городом. В случае аргументации мы точно знаем обосновываемое утверждение и доводы в его пользу, но не всегда вполне уверены в том, что эти доводы обосновывают это утверждение.

То же самое касается зависимых типов. Эти типы четки в смысле их определения, но нечетки в смысле принадлежности им тех или иных объектов. Например, зависимый тип «Население города» зависит от города и имеет четкое определение (например, «население города это количество жителей этого города»), однако для каждого из городов мы относим к ним числа с той или иной степенью уверенности. Аналогично, «Территория города» имеет точное определение (например, «территория, занимаемая данным городом»), но мы не всегда уверены, что тот или иной конкретный участок земли относится к этой территории.

Введем сокращение

$$a : A \coloneqq a \mid \top : A.$$

Оно означает «полную принадлежность», то есть принадлежность в максимальной степени.

Контексты и основные суждения

Будем опираться на представление теории типов в книге [Univalent Foundations Program, The, 2013, Appendix A.2]. Я буду опускать некоторые правила, в которых не участвуют степени убедительности, поскольку они совпадают с приведенными в указанной книге. Кроме того, сделаны небольшие изменения в обозначениях.

Мы предполагаем бесконечную иерархию универсумов $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ и следующие основные типы суждений:

$$\Gamma\ \mathsf{ctx} \qquad \Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \mid \alpha : A \qquad \Gamma \vdash a = a' : A$$

Первое суждение утверждает, что контекст Γ правильно построен, второе — что в контексте Γ A является типом из универсума $\mathcal{U}_i$. Контекстом называется упорядоченная последовательность переменных с указанием их типов и степеней:

$$x_1 \mid \alpha_1 : A_1, x_2 \mid \alpha_2 : A_2, \ldots, x_n \mid \alpha_n : A_n$$

Они подчиняются следующим правилам (здесь $\cdot$ это пустой контекст):

$$\frac{}{\cdot\ \mathsf{ctx}}\ \textsf{ctx-EMP} \qquad \frac{x_1 \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, x_{n-1} \mid \alpha_{n-1} : A_{n-1} \vdash A_n : \mathcal{U}_i}{(x_1 \mid \alpha_1 : A_1, \ldots, x_n \mid \alpha_n : A_n)\ \mathsf{ctx}}\ \textsf{ctx-EXT}$$

$$\frac{(x_1 \mid \alpha_1 : A_1, \dots, x_n \mid \alpha_n : A_n)\ \mathsf{ctx}}{x_1 \mid \alpha_1 : A_1, \dots, x_n \mid \alpha_n : A_n \vdash x_i \mid \alpha_i : A_i}\ \mathsf{Vble}$$

Как видно, мы не рассматриваем случай нечеткого отнесения типов к универсуму типов. Как сказано выше, в нашей формализации как тип, так и его отнесение к типам всегда четко, а вся нечеткость содержится в отнесении термов к типам. Поэтому, в частности, правила формирования типов вида X-FORM ниже не содержат никаких указаний на степени убедительности.

Что касается кумулятивности универсумов (принадлежности универсумов нижних уровней универсумам верхних уровней), то она может как предполагаться, так и не предполагаться. Например, некоторые компьютерные системы позволяют рассматривать оба случая (например, Coq, Agda). Для нашего построения это не имеет значения.

Суждение $\Gamma \vdash a \mid \alpha : A$ имеет смысл: «В контексте Γ объект a относится к типу A со степенью убедительности α». Мы считаем, что степени составляют алгебру убедительности и предполагаем выполнимость соответствующих правил. Вообще говоря, сама эта алгебра должна быть представлена в теоретико-типовой форме, мы, однако, это представление опустим для простоты (эта опущенная часть присутствует в указанной выше Agda-формализации). В том случае, когда тип является пропозицией, а объект ее доказательством, суждение выносится о степени уверенности в том, что аргумент a поддерживает пропозицию A. При этом истинность пропозиции определяется на основе доказательства. Степень уверенности в истинности может быть определена по-разному; будем считать, что она равна супремуму степеней всех доказательств (то есть термов) этой пропозиции:

$$[\![A\ true]\!] = \bigvee_x [\![x : A]\!].$$

Таким образом, степень истинности A (то есть степень непустоты A) равна супремуму степеней принадлежности $[\![a : A]\!]$. Это соответствует «оптимистической установке» — истинность определяется самым сильным аргументом. В частности, при таком определение истинность не зависит от количества имеющихся аргументов.

Всякий объект в нашей формализации сопровождается не только типом, но и степенью принадлежности этому типу. В теории типов Мартин-Лёфа, объект может относиться лишь к одному типу (если не учитывать кумулятивности универсумов). Однако, вообще говоря, если мы не уверены в отнесении объектов к типам, то вполне возможны ситуации, при которых мы один и тот же объект относим к нескольким типам (возможно, с разной степенью уверенности). Более того, в определенном смысле, каждый объект принадлежит к каждому типу, хотя к некоторым из них с минимальной степенью убедительности. С другой стороны, всякий тип может быть пустым лишь с некоторой степенью убедительности. Пустой тип это тип, которому все объекты принадлежат в минимальной степени. В этом описываемая здесь теория отличается от теории Мартин-Лёфа.

Равенство определяется как эквивалентность, и соответствующие правила не содержат указаний на степени убедительности.

Производные типы

Приведем теперь правила для производных типов, конструируемых из других типов. Большей частью, они содержат правила для конструирования типов X-FORM, конструирования объектов типов

DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.37-47

X-INTRO, элиминации или использования объектов типов X-ELIM и вычисления X-COMP.

Правила для типов функций (П-типов) выглядят следующим образом (подчерк обозначает неважное, то есть не используемое далее значение):

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x \,|\, \_ : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (\Pi x : A)\, B : \mathcal{U}_i}\ \Pi\text{-FORM} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash b \,|\, \beta : B}{\Gamma \vdash \lambda(x : A)\, b \,|\, \bigwedge_x \beta : (\Pi x : A)\, B}\ \Pi\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \,|\, \_ : (\Pi x : A)\, B \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A}{\Gamma \vdash f(a) \,|\, [\![f]\!]_a \otimes \alpha : B[a/x]}\ \Pi\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b \,|\, \beta : B \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A}{\Gamma \vdash (\lambda(x : A)\, b)\,(a) = b[a/x] \,|\, \alpha \otimes \beta(a) : B[a/x]}\ \Pi\text{-COMP}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \,|\, \varphi : (\Pi x : A)\, B}{\Gamma \vdash f = (\lambda(x)\, f(x)) \,|\, \varphi : (\Pi x : A)\, B}\ \Pi\text{-UNIQ}$$

Правило П-INTRO оценивает степень убедительности функции как инфимум степеней импликации этой функции по всем аргументам. Это соответствует указанному выше пониманию степени как минимальной: мы убеждены, что степень результата применения функции составит как минимум эту величину. Однако определение функции предполагает, что нам известно значение $[\![f]\!]$ для всех аргументов. Это обстоятельство используется далее в правиле элиминации.

Вообще говоря, в полном виде правило интродукции для функции должно выглядеть следующим образом:

$$\frac{\Gamma, x \,|\, \xi : A \vdash b \,|\, \beta : B}{\Gamma \vdash \lambda(x : A)\, b \,|\, \bigwedge_x (\xi \Rightarrow \beta) : (\Pi x : A)\, B}\ \Pi\text{-INTRO}$$

Мы, однако, считаем, что степень β не зависит от ξ, поэтому можно полагать последнюю равной $\top$ и записывать правило так, как это сделано выше. В таком виде оно напоминает монадную операцию, и указанная выше Agda-формализация действительно реализована с помощью монады Writer. Это, в частности, указывает, что для нашей формализации существенным является условие коммутативного моноида для $\otimes$, условие же полной решетки может быть ослаблено просто до решетки или даже до частичного порядка. Полная решетка существенна, если мы моделируем убедительность как истинностное значение, но это не всегда правильно. Например, это предполагает, что существует максимальная степень убедительности, что не во всяком случае верно. Более того, ни одна из трех указанных выше популярных t-норм не способна моделировать увеличение убедительности при принятии аргумента или при росте количества аргументов. Пример использования алгебры убедительности, более слабой, чем решетка с остатками, приведен в указанной Agda-формализации.

Правило П-ELIM соответствует modus ponens (ср. обобщенный modus ponens в [Заде, 1976, с. 131; Hájek, 1998, p. 170]). Здесь $[\![f]\!]_a$ обозначает степень функции f на аргументе a, как она содержится в определении этой функции. Мы интерпретируем ее как силу аргумента. Очень часто в реальном процессе аргументации эта сила оценивается как одна и та же для всех переменных, и правило интродукции принимает тогда вид:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b \,|\, \varphi : B}{\Gamma \vdash \lambda(x : A)\, b \,|\, \varphi : (\Pi x : A)\, B}\ \Pi\text{-}\textsc{intro},$$

где φ не зависит от x. Тогда в правиле элиминации $[\![f]\!]_a = \varphi$, и результат применения функции имеет степень $\varphi \otimes \alpha$. Вообще, функции соответствуют импликации, степень которой в нечеткой логике, как сказано выше, определяется как остаток (residuum), то есть максимальное значение, которое при t-норме с $[\![a]\!]$ дает в результате $[\![f(a)]\!]$. Наше правило соответствует этому определению. Кроме того, оно проясняет смысл t-нормы как операции, позволяющей по степеням посылок аргумента и самого аргумента вычислять степень его вывода. Степень (или сила) аргумента при этом интерпретируется как степень соответствующей импликации (см. иллюстративный пример ниже).

Правила для типов пар (Σ-типов) выглядят следующим образом:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash (\Sigma x : A)\, B : \mathcal{U}_i}\ \Sigma\text{-}\textsc{form}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A \qquad \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a \,|\, \alpha, b \,|\, \beta) \,|\, \alpha \otimes \beta : (\Sigma x : A)\, B}\ \Sigma\text{-}\textsc{intro}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (\Sigma x : A)\, B \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x : A, y : B \vdash g \,|\, \gamma : C[(x,y)/z] \qquad \Gamma \vdash (a \,|\, \alpha, b \,|\, \beta) \,|\, \alpha \otimes \beta : (\Sigma x : A)\, B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\Sigma x : A)\, B}(z.C, x.y.g, p) \,|\, \gamma \otimes \alpha \otimes \beta : C[p/z]}\ \Sigma\text{-}\textsc{elim}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (\Sigma x : A)\, B \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x : A, y : B \vdash g \,|\, \gamma : C[(x,y)/z] \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A \qquad \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B[a/x]\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{(\Sigma x : A)\, B}(z.C, x.y.g, (a,b)) = g[a/x][b/y] \,|\, \gamma \otimes \alpha \otimes \beta : C[(a,b)/z]}\ \Sigma\text{-}\textsc{comp}$$

Как видно, пара состоит из двух объектов с указанием степени их принадлежности к соответствующим типам. Правило Σ-ELIM позволяет строить функции вида $(\Pi p : (\Sigma x : A)\, B)\, C(p)$ на основе функций вида $(\Pi x : A)\, (\Pi y : B)\, C((x,y))$. Если задана функция $g(x)(y)$, то

$$\mathsf{ind}_{(\Sigma x : A)\, B}(C, g, (a,b)) = g(a)(b).$$

Например, в частном случае первой проекции имеем $g(x)(y) = x, \gamma = \top$, и тогда правило имеет вид:

$$\frac{\Gamma, z : (\Sigma x : A)\, B \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A, y : B \vdash x : A \qquad \Gamma \vdash (a \,|\, \alpha, b \,|\, \beta) \,|\, \alpha \otimes \beta : (\Sigma x : A)\, B}{\Gamma \vdash a \,|\, \alpha \otimes \beta : A}\ .$$

Здесь первые две посылки можно было бы опустить, получив в сокращенном виде правило для проекции:

$$\frac{\Gamma \vdash (a \,|\, \alpha, b \,|\, \beta) \,|\, \alpha \otimes \beta : (\Sigma x : A)\, B}{\Gamma \vdash a \,|\, \alpha \otimes \beta : A}\ .$$

DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.37-47

В случае пропозиций Σ-тип соответствует пропозиции «существует $x : A$, такой, что B». При этом

$$[\![(\Sigma x : A)\, \mathbb{1}\ true]\!] = \bigvee_{x:A} [\![x]\!] = [\![A\ true]\!].$$

Здесь $\mathbb{1}$ это единичный тип, всегда имеющий элемент (см. ниже). Таким образом, степень пропозиции «A истинно» совпадает со степенью пропозиции «существует x типа A».

Правила для ко-произведения выглядят следующим образом:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A + B : \mathcal{U}_i}\ +\text{-FORM}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \\ \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{inl}(a) \,|\, \alpha : A + B}\ +\text{-INTRO}_1 \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i \\ \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{inr}(b) \,|\, \beta : A + B}\ +\text{-INTRO}_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, x : A \vdash c \,|\, \gamma : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y : B \vdash d \,|\, \delta : C[\mathsf{inr}(y)/z] \\ \Gamma \vdash e \,|\, \_ : A + B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, e) \,|\, h(e) : C[e/z]}\ +\text{-ELIM}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash c \,|\, \gamma : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y : B \vdash d \,|\, \delta : C[\mathsf{inr}(y)/z] \\ \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathsf{inl}(a)) = c[a/x] \,|\, \gamma \otimes \alpha : C[\mathsf{inl}(a)/z]}\ +\text{-COMP}_1$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, z : (A + B) \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma, x : A \vdash c \,|\, \gamma : C[\mathsf{inl}(x)/z] \qquad \Gamma, y : B \vdash d \,|\, \delta : C[\mathsf{inr}(y)/z] \\ \Gamma \vdash b \,|\, \beta : B\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{A+B}(z.C, x.c, y.d, \mathsf{inr}(b)) = d[b/y] \,|\, \delta \otimes \beta : C[\mathsf{inr}(b)/z]}\ +\text{-COMP}_2$$

Ко-произведение является обобщением дизъюнктивной суммы и дизъюнкции. Это тип, который может иметь в качестве элемента элементы одного из двух других типов. Способы конструирования элементов $A + B$ обозначаются $\mathsf{inl}(a)$ для $a : A$ и $\mathsf{inr}(b)$ для $b : B$ (соответственно, «левая» и «правая» инъекции). Функция индукции ind_{A+B} позволяет построить функции вида $(\Pi x : A + B)\, C$ из двух функций вида $(\Pi x : A)\, C$ и $(\Pi y : B)\, C$. Функции ind и h равны

$$\mathsf{ind}_{A+B}(C, c, d, e) = \begin{cases} c(a) & \text{при } e = \mathsf{inl}(a) \\ d(b) & \text{при } e = \mathsf{inr}(b) \end{cases} \qquad h(e) = \begin{cases} \gamma \otimes \alpha & \text{при } e = \mathsf{inl}(a) \\ \delta \otimes \beta & \text{при } e = \mathsf{inr}(b) \end{cases}$$

Правила для пустого типа $\mathbb{0}$:

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{0} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{0}\text{-FORM} \qquad \frac{\Gamma, x : \mathbb{0} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : \mathbb{0}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{0}}(x.C, a) \,|\, \alpha : C[a/x]}\ \mathbb{0}\text{-ELIM}$$

Функция $\mathsf{ind}_{\mathbb{0}}$ позволяет построить функцию из пустого типа в соответствие с принципом ex falso quodlibet.

Единичный тип или синглетон $\mathbb{1}$ это тип, который всегда имеет элемент с некоторой степенью уверенности:

$$\frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \mathbb{1} : \mathcal{U}_i}\ \mathbb{1}\text{-FORM} \qquad \frac{\Gamma\ \mathsf{ctx}}{\Gamma \vdash \star : \mathbb{1}}\ \mathbb{1}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c \,|\, \gamma : C[\star/x] \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : \mathbb{1}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(x.C, c, a) \,|\, \gamma \otimes \alpha : C[a/x]}\ \mathbb{1}\text{-ELIM}$$

$$\frac{\Gamma, x : \mathbb{1} \vdash C : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash c \,|\, \gamma : C[\star/x] \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : \mathbb{1}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(x.C, c, a) = c \,|\, \gamma \otimes \alpha : C[\star/x]}\ \mathbb{1}\text{-COMP}$$

Этот тип соответствует всегда истинной пропозиции, в которой мы уверены. Индуктивный принцип для него показывает, что для конструирования функции из единичного типа в тип C достаточно иметь элемент C. Соответственно, $\mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(C, c, a) = c$.

Правила для $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$, фактически, являются частными случаями правил П-типа для соответствующих функций.

Наконец, приведем правила для пропозиционального равенства.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \_ : A \qquad \Gamma \vdash b \,|\, \_ : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A b : \mathcal{U}_i}\ {=}\text{-FORM} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A}{\Gamma \vdash \mathsf{refl}_a \,|\, \alpha : a \equiv_A a}\ {=}\text{-INTRO}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A, y : A, p : x \equiv_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, z : A \vdash c \,|\, \gamma : C[z, z, \mathsf{refl}_z/x, y, p] \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A \qquad \Gamma \vdash b \,|\, \beta : A \qquad \Gamma \vdash p' \,|\, \pi : a \equiv_A b\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\equiv_A}(x.y.p.C, z.c, a, b, p') \,|\, \gamma \otimes \alpha \otimes \beta \otimes \pi : C[a, b, p'/x, y, p]}\ {=}\text{-ELIM}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma, x : A, y : A, p : x \equiv_A y \vdash C : \mathcal{U}_i \\ \Gamma, z : A \vdash c \,|\, \gamma : C[z, z, \mathsf{refl}_z/x, y, p] \qquad \Gamma \vdash a \,|\, \alpha : A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\equiv_A}(x.y.p.C, z.c, a, a, \mathsf{refl}_a) = c[a/z] \,|\, \gamma \otimes \alpha : C[a, a, \mathsf{refl}_a/x, y, p]}\ {=}\text{-COMP}$$

Обратите внимание, что в правиле интродукции refl_a имеет в качестве индекса только a. Мы считаем, что для всякого объекта его степени принадлежности типам являются неотъемлемыми характеристиками, поэтому задание a и A автоматически определяет и α. Причем мы полагаем, что степень принадлежности самого refl_a к типу $a \equiv_A a$ также равна α.

Правило $=$-ELIM утверждает, что для любого предиката $C(x, y, p)$ при наличии его доказательства для z, z, refl_z можно построить доказательство для любых a, b, таких, что существует $p : a \equiv_A b$. При этом

$$\mathsf{ind}_{\equiv_A}(C, c, a, b, p') = c(a) = c(b).$$

Поскольку α и β могут, вообще говоря, различаться, мы оцениваем результат, используя их t-норму.

Пример

В качестве заключения и иллюстрации рассмотрим научно-популярный текст с сайта «Викиновости» (https://ru.wikinews.org) [ср.: Zagorulko et al., 2020, pp. 363 sqq.]:

«Хорошо известно, что в центре практически каждой крупной галактики находится массивная черная дыра. В то же время самые тяжелые галактики окружены самыми массивными гало из темной материи. Это дало основания для предположений, что темная материя играет ключевую роль в росте черных дыр. Исследования ученых из Института внеземной физики общества Макса Планка, Университетской обсерватории Мюниха и Техасского университета в Остине, однако, показали, что такой прямой связи не существует, а рост черной дыры определяется процессом формирования галактического ядра.».

В этом тексте можно выделить следующие явные и неявные пропозиции (опуская часть из них):

- $S1$: Хорошо известно, что в центре практически каждой крупной галактики находится массивная черная дыра.
- $A1$ (аргумент «Ad populum»): Если хорошо известно, что A, то A.
- $S2$: В центре практически каждой крупной галактики находится массивная черная дыра.
- $S3$: Самые тяжелые галактики окружены самыми массивными гало из темной материи.
- $A2$ (аргумент от корреляции к причине): Если есть корреляция, то есть причина.
- $S4$: Темная материя играет ключевую роль в росте черных дыр.
- $S5$: Указанные ученые обладают компетенцией в области астрофизики.
- $S7$: Исследования ученых … показали, что … рост черной дыры определяется процессом формирования галактического ядра.
- $A4$ (аргумент от эксперта): Если ученые, обладающие компетенцией в области D, утверждают о ней A, то A.
- $S9$: Рост черной дыры определяется процессом формирования галактического ядра.
- $S4{-}9$: Если темная материя играет ключевую роль в росте черных дыр, то неверно, что рост черной дыры определяется процессом формирования галактического ядра ($S4 \to \neg S9$).
- $S9{-}4$: Если рост черной дыры определяется процессом формирования галактического ядра, то неверно, что темная материя играет ключевую роль в росте черных дыр ($S9 \to \neg S4$).

Выберем в качестве t-нормы норму произведения и припишем утверждениям для примера некоторые степени. Тогда схемы вывода могут быть представлены следующим образом (указаны первоначальные степени там, где они есть; общий контекст и названия термов-доказательств опущены):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\_\mid 0.9 : S1 \qquad \_\mid 0.7 : A1}{S2} \qquad \_\mid 0.9 : S3 \qquad \_\mid 0.8 : A2}{S4} \qquad \_\mid 1.0 : S4{-}9}{S9 \to \mathbb{0}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\_\mid 0.8 : S7 \qquad \_\mid 0.8 : S5 \qquad \_\mid 1.0 : A4}{S9} \qquad \_\mid 1.0 : S9{-}4}{S4 \to \mathbb{0}}$$

Здесь все правила являются Π-ELIM, то есть, фактически, нечеткими modus ponens. На основе правил вывода могут быть вычислены производные веса:

$$[\![S2]\!] = 0.63 \qquad [\![S4]\!] = [\![S9 \to \mathbb{0}]\!] = 0.45 \qquad [\![S9]\!] = [\![S4 \to \mathbb{0}]\!] = 0.64.$$

Мы, следовательно, имеем два доказательства для пустой пропозиции с равными весами $[\![S9]\!] \otimes [\![S9 \to \mathbb{0}]\!] = [\![S4]\!] \otimes [\![S4 \to \mathbb{0}]\!] = 0.29$. Этот вес измеряет степень противоречивости или конфликтности приведенного выше текста.

Список литературы / References

Заде, Л. (1976). *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений*. М.: Мир. 166 с.

Zadeh, L. (1976). *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*. M. 166 pp. (In Russ)

Hájek, P. (1998). *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Trends in Logic 4. Springer. VIII, 299 pp.

Martin-Löf, P. (1984). *An Intuitionistic Type Theory. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Studies in Proof Theory. Napoli. Bibliopolis. 91 pp.

Univalent Foundations Program, The (2013). *Homotopy Type Theory. Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. 589 pp. [Online]. URL: http://homotopytypetheory.org/book.

Zagorulko, Y., Domanov, O., Sery, A., Sidorova, E., and Borovikova, O. (2020). Analysis of the Persuasiveness of Argumentation in Popular Science Texts. In Kuznetsov, S., Panov, A. and Yakovlev, K. (ed.). *Artificial Intelligence. RCAI 2020*. Springer. pp. 351-367. DOI: 10.1007/978-3-030-59535-7_26.

Сведения об авторе / Information about the author

Доманов Олег Анатольевич — кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН, г. Новосибирск, Николаева, 8, e-mail: odomanov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-0057-3901.

Статья поступила в редакцию 20.10.2020
После доработки 10.11.2020
Принята к публикации 21.11.2020

Oleg Domanov — Candidate of Philosophy, associate Professor, Senior Researcher of the Insitute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva Str., 8, e-mail: odomanov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-0057-3901.

The paper was submitted 20.10.2020
Received after reworking 10.11.2020
Accepted for publication 21.11.2020