ФИЛОСОФИЯ

УДК 165.3:122

ЛАДОВ О ПАРАДОКСЕ РАССЕЛА

Е. В. Борисов
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
borisov.evgeny@gmail.com

Аннотация. В ряде публикаций последних лет В. А. Ладов разрабатывает единообразную концепцию теоретико-множественных и семантических парадоксов. Его концепция содержит, в частности, единую формализацию парадоксов и определение их необходимых и достаточных условий. Эта концепция представляется интересной, однако, на мой взгляд, некоторые из его понятий эксплицированы не полностью, что делает неясными некоторые моменты в его трактовке необходимых и достаточных условий парадоксов. В данной статье я рассматриваю предложенный Ладовым анализ парадокса Рассела и показываю недостатки в его определении понятий самореферентного множества и отрицательного свойства.

Ключевые слова: теоретико-множественные парадоксы, парадокс Рассела, самореферентность, отрицание.

Для цитирования: Борисов, Е. В. (2024). Ладов о парадоксе Рассела. *Respublica Literaria*. Т. 5. №. 4. С. 5-11. DOI: 10.47850/RL.2024.5.4.5-11

LADOV ON RUSSELL’S PARADOX

E. V. Borisov
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
borisov.evgeny@gmail.com

Abstract. In a series of recent publications, V. A. Ladov elaborated a unified treatment of set-theoretic and semantic paradoxes, including Russell’s paradox. His theory includes a unified formalization of paradoxes in question and a description of their necessary and sufficient conditions. His theory is interesting but to my view, some of his concepts are not fully explicated, because of which his description of necessary and sufficient conditions of paradoxes is unclear in some respects. In the present paper, I examine Ladov’s analysis of Russell’s paradox and show the insufficiency in his definition of the concepts of self-referential set and negative property.

Keywords: set theoretic paradoxes, Russell’s paradox, self-reference, negation.

For citation: Borisov, E. V. (2024). Ladov on Russell’s Paradox. *Respublica Literaria*. Vol. 5. No. 4. Pp. 5-11. DOI: 10.47850/RL.2024.5.4.5-11

Введение

В ряде работ В. А. Ладова, опубликованных в последние годы [Ладов, 2020; Ладов, 2023a; Ладов, Чаплинская, 2023], предложена единая трактовка ряда теоретико-множественных и семантических парадоксов и предпринята попытка выявить необходимые и достаточные условия их наличия в теориях. Данный проект представляется продуктивным как в логическом аспекте, так и в свете его возможных философских применений [Ладов, Чаплинская, 2023]. Однако, на мой взгляд, концепция парадоксов, как она представлена в работах Ладова на данный момент, содержит ряд неясностей и требует уточнения некоторых понятий. Прежде всего это относится к понятиям самореферентности и отрицательности, которые Ладов использует при определении необходимых и достаточных условий парадоксов. Целью данной статьи является указание на эти неясности на примере парадокса Рассела. В первом разделе статьи представлен данный парадокс и показаны способы его устранения в аксиоматических теориях множеств. Во втором разделе показаны недостатки предложенной Ладовым трактовки данного парадокса; в частности, приведены контрпримеры к его определению необходимых и достаточных условий парадоксов.

1. Парадокс Рассела и его устранение в аксиоматических теориях множеств

В наивной теории множеств терм вида $\{x : P(x)\}$ понимается как множество всех множеств, имеющих свойство P. В таких термах вместо $P(x)$ можно подставить любую формулу, в которой x является единственной свободной переменной. В силу данного определения для любого такого терма верна эквивалентность:

(1) $y \in \{x : P(x)\}$, если и только если $P(y)$

Парадокс Рассела в этой теории возникает следующим образом. Определим множество Рассела w как множество множеств, не принадлежащих себе: $w = \{x : x \notin x\}$. Подставив в (1) $x \notin x$ вместо $P(x)$ и $y \notin y$ вместо $P(y)$, а затем подставив w вместо y, мы получаем парадоксальный результат: $w \in \{x : x \notin x\}$, если и только если $w \notin w$. Или с учетом определения w:

(2) $w \in w$, если и только если $w \notin w$

Данное утверждение парадоксально в очевидном смысле: оно утверждает эквивалентность пропозиции $w \in w$ и ее отрицания.

Парадоксы Рассела (а также другие теоретико-множественные парадоксы, такой как парадокс Бурали-Форти) устраняется в аксиоматических теориях множеств. Рассмотрим, как это происходит в теории множеств фон Неймана-Бернайса-Геделя (NBG) и теории Цермелло-Френкеля (ZF)[1].

В NBG парадокс Рассела устраняется следующим образом:

1. Объекты данной теории (классы) делятся на два вида: множества и собственные классы. Класс называется множеством, если он принадлежит некоторому классу; класс называется собственным классом, если не существует класса, которому он принадлежит.

2. Терм вида $\{x : P(x)\}$ понимается как класс всех *множеств*, имеющих свойство P. С учетом различия между множествами и собственными классами это значит, что в NBG

[1] Используемые ниже определения и теоремы взяты в классических учебниках Адамсона [Adamson, 1998] и Йеха [Jech, 2006].

собственные классы не могут принадлежать классу $\{x : P(x)\}$, даже если они имеют свойство P. Таким образом, в NBG (1) трансформируется в (3):

(3) $y \in \{x : P(x)\}$, если и только если $[(\exists x)\ y \in x$ и $P(y)]$

Произведя в (3) нужные подстановки, мы получаем (4):

(4) $w \in w$, если и только если $[(\exists x)\ w \in x$ и $w \notin w]$

В отличие от (2), в (4) не утверждается эквивалентность пропозиции и ее отрицания. Более того, в NBG (4) оказывается истинным, поскольку обе части (4) оказываются ложными. Дело в том, что в NBG: 1) w является собственным классом, что фальсифицирует правую часть (4); 2) ни один класс не принадлежит себе, что фальсифицирует левую часть (4).

В ZF парадокс Рассела устраняется следующим образом. В данной теории вместо термов вида $\{x : P(x)\}$ используются термы вида $\{x \in C : P(x)\}$, где C – некоторое множество; выражения вида $\{x : P(x)\}$ в ZF не являются термами. Терм такого вида обозначает множество множеств, принадлежащих C и имеющих свойство P; иначе говоря, терм такого вида обозначает подмножество C, выделяемое свойством P, т. е. содержащее те и только те элементы C, которые имеют это свойство. (При этом в ZF, в отличие от NBG, не проводится различие между множествами и собственными классами.) Таким образом, в ZF (1) трансформируется (для любого множества C) в (5):

(5) $y \in \{x \in C : P(x)\}$, если и только если $[y \in C$ и $P(y)]$

Выбрав некоторое множество C, мы можем определить ZF-аналог множества Рассела $w_C = \{x \in C : x \notin x\}$. Произведя в (5) необходимые подстановки, в частности, подставляя w_C вместо y, мы получаем (6):

(6) $w_C \in w_C$, если и только если $[w_C \in C$ и $w_C \notin w_C]$

В ZF (6) оказывается истинным, как и (4) в NBG. В самом деле: в ZF (как и в NBG) ни одно множество не принадлежит себе, что фальсифицирует левую часть (6). По этой же причине для любого множества C оказывается, что $w_C = C$, а значит, $w_C \notin C$: это фальсифицирует правую часть (6). Таким образом, обе части (6) ложны, следовательно, (6) истинно.

Устранение парадокса Рассела в NBG и ZF имеют общее основание: в обеих теориях невозможно сконструировать класс / множество *всех* классов / множеств, имеющих некоторое свойство P. В NBG класс, выделяемый по свойству P, может содержать только множества, но не собственные классы; в ZF множество, выделяемое по свойству P, может быть только подмножеством некоторого предварительно выбранного множества.

2. Ладов об условиях парадоксов

Исследуя необходимые и достаточные условия парадоксов, Ладов предлагает единую формализацию ряда теоретико-множественных и семантических парадоксов, которую он называет «Структура Рассела»[2] [Ладов, 2020, с. 24; Ладов, 2023a, с. 19]. Эта формализация выделяет три структурных момента, характерных, по Ладову, для всех рассмотренных им парадоксов:

(i) $w = \{x: P(x)\}$
(ii) $e \in x$
(iii) $(e \in w)$ & $(e \notin w)$[3].

Применительно к парадоксу Рассела, $P(x)$ – это $x \notin x$, а e – это w. Таким образом, в (i) дано определение множества Рассела, а в (iii) сформулировано выводимое противоречие. Мне неясен пункт (ii), поскольку Ладов не поясняет, что он подразумевает под x в этом пункте, но для нас сейчас существенна данная им характеристика w и P. Ладов характеризует w как «самореферетное» множество, а P – как свойство, «содержащее отрицание». Эта характеристика w и P существенна для предложенной им концепции необходимых и достаточных условий парадоксов: применительно к парадоксу Рассела, самореферентность w является необходимым условием, а отрицание, содержащееся в P, достаточным[4]. На мой взгляд, эти два понятия содержат существенные неясности и требуют уточнения. Ниже я обосновываю этот тезис.

A. *О понятии самореферентности.* Понимание самореферентности у Ладова отличается от понимания этого феномена у Рассела. По Расселу, самореферентность (в контексте названного его именем парадокса) состоит в том, что мы: 1) определяем w через свойство непринадлежности себе, 2) допускаем, что w имеет это свойство [Russell, 1908, p. 224; Рассел, 2006, с. 18]. Иначе говоря, мы применяем свойство, которое определяет элементы w, к самому w. Здесь самореферентность – это свойство рассуждения, т. е. вывода противоречия. Однако у Ладова самореферентность – это также свойство объекта e (в случае парадокса Рассела этот объект совпадает с w, т. е. с $\{x : x \notin x\}$). Но в каком смысле множество может быть самореферентным? Ладов пишет: «В парадоксе Рассела элемент e содержит самореферентость, поскольку в качестве e выступает класс w, который содержит себя самого» [Ладов, 2023a, с. 24]. Судя по этому пассажу, критерием самореферентности множества является его принадлежность себе. Но принадлежит ли w себе? Если мы допустим, что принадлежит, мы должны будем сделать вывод, что оно себе не принадлежит, а если так, нам придется сделать вывод, что w не самореферентно, т. е. согласиться на противоречие. Конечно, наивная теория множеств противоречива, но я не думаю, что Ладов согласен, что противоречива его теория парадоксов. Поэтому вопрос о критериях самореферентности множеств, как мне кажется, остается открытым. Существенный аспект этого вопроса состоит

---

[2] Ладов применяет эту формализацию к парадоксам Рассела, Бурали-Форти, Кенига, Ришара, Греллинга, Берри, парадоксу лжеца и парадоксу отношения. Идея единообразной формализации различных парадоксов впервые реализована Пристом [Priest, 1995; Прист, 2022]. Формализация Ладова существенно отличается от формализации Приста [Ладов, 2023b, с. 69].

[3] Я незначительно изменил нотацию и нумерацию пунктов.

[4] Ладов говорит о необходимых и достаточных «причинах» появления парадоксов и о «событии появления парадокса» [Ладов, 2023a, с. 25]. Это словоупотребление мне кажется неточным: наличие или отсутствие парадокса – это логическое свойство теории, но логические свойства теорий не являются событиями и не могут участвовать в каузальном взаимодействии. Поэтому я понимаю термин «причина» в контексте работ Ладова в логическом смысле, т. е. в смысле условия.

в следующем: сохраняется ли самореферентность в аксиоматических теориях множеств? В частности: является ли самореферентным, с точки зрения Ладова, класс {x : x ∉ x } в NBG, и является ли таковым множество {x ∈ C: x ∉ x } в ZF? Поскольку NBG свободна от парадоксов, предположу, что с точки зрения Ладова класс {x : x ∉ x } в этой теории не самореферентен. Но чем обусловлено наличие или отсутствие этого свойства в той или иной теории? Ладов не дает ответа на эти вопросы, что порождает неясность в его диагностике парадоксов.

B. *О понятии «свойство, содержащее отрицание».* Согласно Ладову, достаточным условием парадокса Рассела (как и всех рассмотренных им парадоксов, кроме парадокса Бурали-Форти) в наивной теории множеств является отрицательный характер свойства P в приведенной выше схеме: парадокс имеет место, потому что «в свойстве P … присутствует отрицание» [Ладов, 2023a, с. 26]. В самом деле: в случае парадокса Рассела w определяется как {x : x ∉ x}, и в определяющем свойстве отрицание присутствует (x ∉ x – это сокращение для ~x ∈ x). При этом, если в данном терме удалить отрицание, мы получим терм {x : x ∈ x}, который, по Ладову, парадокса не порождает [там же]. На этом основании Ладов делает вывод, что присутствие отрицания в свойстве P является достаточным условием парадокса Рассела.

Приведенное рассуждение Ладова не вполне ясно по двум причинам.

1. Очевидно, {x : x ∈ x} = {x : ~~x ∈ x}, следовательно, если терм {x : x ∈ x} не порождает противоречия, его не должен порождать и {x : ~~x ∈ x}. Однако в последнем отрицание присутствует, а значит, по Ладову, выполняется достаточное условие парадокса. Приведенный пример можно обобщить. Существует бесконечно много формул, содержащих отрицание, но эквивалентных формуле x ∈ x, например, x ∉ x → x ∈ x, ~(x ∉ x & (x ∈ x → x ∈ x)) и т. д. Если Q(x) – любая из таких формул, то {x : Q(x)} = {x : x ∈ x}. При этом терм {x : Q(x)} должен, по Ладову, порождать парадокс, тогда как {x : x ∈ x} его не порождает. Вывод: чтобы критерий Ладова работал, понятие «присутствие отрицания» в свойстве необходимо уточнить.

2. В наивной теории множеств единственным примитивным предикатом является ∈. Говоря неформально, этот предикат выражает принадлежность элемента множеству. Можно построить эквивалентную теорию с единственным двухместным предикатом R, который, говоря неформально, выражает непринадлежность элемента множеству, т. е. формула xRy в этой теории имеет тот же смысл, что x ∉ y в наивной теории множеств[5]. В этой теории расселово множество w было бы определено как {x : xRx}. Очевидно, в этой теории имеет место парадокс Рассела, однако формула xRx не содержит отрицания. Это ставит под вопрос тезис Ладова о необходимых и достаточных условиях парадоксов (как минимум, применительно к парадоксу Рассела). Возможно, говоря о «присутствии отрицания в свойстве», Ладов имеет в виду не формальное свойство формул, а интуитивное понимание свойств. Если так, то это понимание требует экспликации.

[5] Соответственно, формула ~xRy имеет в этой теории тот же смысл, что x ∈ x в наивной теории множеств. В остальном языки этих теорий идентичны. Эти обстоятельства обусловливают взаимную переводимость этих языков.

Как видим, неясности в определении понятий самореферентного множества и содержащего отрицание свойства требуют уточнения сформулированных Ладовым условий парадоксов[6].

Заключение

Разрабатываемая Ладовым концепция парадоксов интересна по следующим причинам: 1) она содержит единообразную формализацию различных теоретико-множественных и семантических парадоксов; 2) это позволяет определять необходимые и достаточные условия различных парадоксов; 3) эта концепция имеет интересные философские приложения. Однако выше было показано, что концепция Ладова содержит ряд неясностей, устранение которых требует более точного определения некоторых понятий. Это относится к понятиям самореферентного множества и свойства, содержащего отрицание. Недоопределенность этих понятий в работах Ладова позволяет, в частности, привести контрпримеры, ставящие под сомнение его трактовку условий парадоксов.

Список литературы / References

Борисов, Е. В. (2024). Прист о теоретико-множественных парадоксах. *Respublica Literaria.* Т. 5. № 3. С. 2-12. DOI: 10.47850/RL.2024.5.3.5-12.

Borisov, E. V. (2024). Priest on Set-Theoretic Paradoxes. *Respublica Literaria.* Vol. 5. № 3. Pp. 2-12. DOI: 10.47850/RL.2024.5.3.5-12. (In Russ.)

Ладов, В. А. (2020). *Логика. Онтология. Эпистемология. Критика релятивизма в контексте аналитической философии.* Томск: Изд-во Томского ун-та.

Ladov, V. A. (2020). *Logic. Ontology. Epistemology. Critique of Relativism in the context of Analytic Philosophy*. Tomsk. (In Russ.)

Ладов, В. А. (2023a). О принципе единого решения парадоксов. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 17-30. DOI: 10.5840/eps202360336.

Ladov, V. A. (2023a). On the Principle of Uniform Solution to Paradoxes. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 17-30. DOI: 10.5840/eps202360336. (In Russ.)

Ладов, В. А. (2023b). О парадоксах: ответ оппонентам. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 68-76. DOI: 10.5840/eps202360342.

Ladov, V. A. (2023b). On Paradoxes. Reply to Critics. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 68-76. DOI: 10.5840/eps202360342. (In Russ.)

[6] В [Борисов, 2024] я показал, что необходимым условием некоторых теоретико-множественных парадоксов является использование метатеоретических и метаязыковых ресурсов (к парадоксу Рассела это не относится). В концепции Ладова этот момент не учитывается. Я планирую детально развернуть этот критический тезис в одной из последующих публикаций.

Ладов, В. А., Чаплинская, Я. И. (2023). Аналитический реализм в формальном аспекте: теория и практика. *Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология.* № 75. С. 38-48. DOI: 10.17223/1998863X/75/4.

Ladov, V. A., Chaplinskaya, Ya. I. (2023). Analytical realism in the formal aspect: theory and practice. *Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science.* No. 75. Pp. 38-48. DOI: 10.17223/1998863X/75/4. (In Russ.)

Прист, Г. (2022). *За пределами мысли.* Пер. с англ. В. В. Целищева. М.: Канон+.
Priest, G. (2022). *Beyond the Limits of Thought.* Tselishchev, V. V. (transl.). Moscow. (In Russ.)

Рассел, Б. (2006). Математическая логика, основанная на теории типов. *Логика, онтология, язык*. Пер. с англ. В. А. Суровцева. Томск: Изд-во Томского ун-та. С. 16-62.
Russell, B. (2006). Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. In *Logic, Ontology, Language*. Surovtsev, V. A. (transl.). Tomsk. Pp. 16-62. (In Russ.)

Adamson, I. (1998). *A Set Theory Workbook.* Boston, Basel, Berlin. Birkhäuser.

Jech, T. (2006). *Set Theory.* The Third Millenium Edition. Berlin. Springer.

Russell, B. (1908). Matёhematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics.* Vol. 30. No. 3. Pp. 222-262.

Priest, G. (1995). *Beyond the Limits of Thought.* Cambridge. Cambridge University Press.

Сведения об авторе / Information about the author

Борисов Евгений Васильевич – доктор философских наук, главный научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail: borisov.evgeny@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-6587-9616

Статья поступила в редакцию: 15.10.2024
После доработки: 18.11.2024
Принята к публикации: 25.11.2024

Borisov Evgeny – Doctor of Philosophical Sciences, Chief Researcher of the Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva Str., 8, e-mail: borisov.evgeny@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-6587-9616

The paper was submitted: 15.10.2024
Received after reworking: 18.11.2024
Accepted for publication: 25.11.2024