ФИЛОСОФИЯ

УДК 165.3:122

ПРИСТ О ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ПАРАДОКСАХ

Е. В. Борисов
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
borisov.evgeny@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются два теоретико-множественных парадокса – парадокс Бурали-Форти и парадокс Кенига – в трактовке Приста. Показано, что парадокс Кенига не является строго теоретико-множественным, потому что базируется на некоторых метатеоретических представлениях и формулируется на метаязыке. Прист считает, что парадокс Бурали-Форти не устраняется в аксиоматических теориях множеств, но воспроизводится при их интерпретации. В статье показано, что этот тезис не имеет под собой достаточного основания. Кроме того, показано, что даже если этот тезис верен, он (как и парадокс Кенига) формулируется на метаязыке и базируется на метатеоретических основаниях.

Ключевые слова: теоретико-множественные парадоксы, метаязык, метатеория, Прист.

Для цитирования: Борисов, Е. В. (2024). Прист о теоретико-множественных парадоксах. *Respublica Literaria.* Т. 5. № 3. С. 5-12. DOI: 10.47850/RL.2024.5.3.5-12

PRIEST ON SET-THEORETIC PARADOXES

E. V. Borisov
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
borisov.evgeny@gmail.com

Abstract. Two set-theoretic paradoxes in Priest's interpretation are considered, viz. Burali-Forti's paradox and Koenig's one. It is argued that Koenig's paradox, strictly speaking, is not a set-theoretic one because it is based on some metatheoretic ideas, and is formulated in metalanguage. Priest holds that Burali-Forti's paradox is not fully eliminated even in axiomatic set theories and that it can be seen when set theories are interpreted. In the paper, I show that this claim is not sufficiently grounded. Moreover, it is shown that even if this claim is true, it is based on some metathreoretic ideas and formulated in metalanguage (as well as Koenig's paradox).

Keywords: set theoretic paradoxes, metalanguage, metatheory, Priest.

For citation: Borisov, E. V. (2024). Priest on Set-Theoretic Paradoxes. *Respublica Literaria.* Vol. 5. No. 3. Pp. 5-12. DOI: 10.47850/RL.2024.5.3.5-12

Введение

Один из главных философских тезисов Г. Приста состоит в том, что парадоксы коренятся не в ошибках при построении теорий, а в самой природе мышления. Поэтому парадоксы неустранимы: ошибки можно исправить, но природа мышления неизменна[1]. По мнению Приста, это относится, в частности, к теоретико-множественным парадоксам. В данной статье я показываю, что последний тезис не очевиден. На мой взгляд, некоторые парадоксы, которые Прист в «Beyond the limits of thought» [Priest, 1995] рассматривает как теоретико-множественные, выходят за рамки теории множеств, поскольку базируются на метатеоретических представлениях и формулируются на метаязыке. Это значит, что сама по себе (аксиоматическая) теория множеств от этих парадоксов свободна. В первом и втором разделах статьи представлены две схемы парадоксов, которые формулирует Прист, и с использованием этих схем описаны парадоксы Бурали-Форти и Кенига. В третьем разделе применительно к этим парадоксам доказан приведенный выше тезис.

1. Схема Рассела и парадокс Бурали-Форти

Схема Рассела [Priest, 2008, p. 142] представляет собой конъюнкцию следующих трех положений[2]:

(1) существует $\Omega = \{y : \varphi(y)\}$;

(2) если $x \subseteq \Omega$, то $\delta(x) \notin x$;

(3) если $x \subseteq \Omega$, то $\delta(x) \in \Omega$.

Здесь δ – это функция от булеана Ω к Ω, т. е. функция, отображающая подмножества Ω на элементы Ω. Прист дает положениям, содержащимся в этой схеме, названия: (1) он называет положением о существовании, (2) – положением о трансценденции (в том смысле, что $\delta(x)$ не лежит в x), (3) – положением о замкнутости (в том смысле, что Ω замкнуто относительно δ). Схема Рассела представляет собой противоречивое множество утверждений: подставив Ω вместо x в (2) и (3), мы получим $\Omega \subseteq \Omega \rightarrow \delta(\Omega) \notin \Omega$ и $\Omega \subseteq \Omega \rightarrow \delta(\Omega) \in \Omega$, и поскольку антецедент этих импликаций является теоретико-множественной теоремой, мы получаем противоречие $\delta(\Omega) \notin \Omega$ и $\delta(\Omega) \in \Omega$.

Прист показывает, что некоторые парадоксы наивной теории множеств являются экземплярами этой схемы. Проиллюстрируем этот тезис на примере парадокса Бурали-Форти. Парадокс состоит в следующем. В наивной теории множеств (1) для каждого ординала x существует ординал y, такой, что x меньше y[3]. С другой стороны, класс всех ординалов (будем, по сложившейся традиции, обозначать его On) – это ординал, и поскольку On содержит все ординалы, (2) не существует ординала y, такого, что On меньше y. Как видим, (2) противоречит (1). Этот парадокс возникает в результате следующих подстановок в схему Рассела:

---

[1] Это главный тезис его монографии «Beyond the limits of thought» [Priest, 1995] (в переводе В. В. Целищева «За пределами мысли» [Прист, 2022]). Этот тезис составляет философскую мотивацию разработанной Пристом «Логики парадокса». Логика парадокса – это параконсистентная логика, которая допускает противоречие и поэтому может адекватно моделировать (как минимум некоторые) рассуждения [Priest, 2008, ch. 7, 21; Priest, 1995, pp. 188-194].

[2] Я несколько изменил нумерацию положений.

[3] Отношение «меньше» между ординалами – это отношение принадлежности, т. е. фраза «x меньше y» означает, что $x \in y$.

- φ – это свойство быть ординалом;
- соответственно, Ω – это класс всех ординалов;
- δ определяется следующим образом: если $x \subseteq \Omega$, то $\delta(x)$ – это наименьший ординал y, такой, что все элементы x меньше y[4].

2. Схема Приста и парадокс Кенига

Схема Приста [Priest, 1995, p. 147] представляет собой модификацию схемы Рассела, состоящую в следующем: она применяется, только если класс Ω и его релевантные подклассы имеют свойство ψ:

(1) существует $\Omega = \{y : \varphi(y)\}$, и $\psi(\Omega)$;

(2) если $x \subseteq \Omega$ и $\psi(x)$, то $\delta(x) \notin x$;

(3) если $x \subseteq \Omega$ и $\psi(x)$, то $\delta(x) \in \Omega$[5].

Если на место ψ подставить какое-нибудь свойство, которым обладают все классы (например, $\lambda x.x=x$, т. е. свойство быть равным себе), то схема Приста будет сведена к схеме Рассела (т. е. каждое положение схемы Приста окажется эквивалентным соответствующему положению схемы Рассела). Таким образом, схему Приста можно рассматривать как обобщение схемы Рассела.

Прист иллюстрирует эту схему на примере парадокса Кенига. Этот парадокс состоит в следующем. Некоторые ординалы имеют определения на русском языке. Например:

- 0 – это наименьший ординал;
- 2 – это ординал, следующий за ординалом, следующим за наименьшим ординалом;
- ω – это наименьший непустой ординал, не имеющий предшественника.

То же можно сказать о классах ординалов. Например, $\{\omega\}$ – это синглетон, содержащий наименьший непустой ординал, не имеющий предшественника.

Определение на русском языке – это конечная последовательность слов, при этом русский язык содержит конечное множество слов. Из этого следует, что множество определений на русском языке является не более, чем счетным[6]. Но класс ординалов является более, чем счетным, следовательно, класс ординалов, имеющих определение на русском языке – это собственный подкласс класса всех ординалов. Иначе говоря, существуют ординалы, не имеющие определения на русском языке. Ниже я буду говорить «определимый ординал» в смысле «ординал, имеющий определение на русском языке»; аналогично буду употреблять термин «неопределимый ординал». Обозначим класс неопределимых ординалов X. Любой непустой класс ординалов имеет наименьший элемент, и поскольку X не пуст, у него есть наименьший элемент; обозначим его y. Итак, y – это

[4] Функция δ определена для любого множества ординалов. Это следует из следующих теорем: 1) для любого множества ординалов x существует ординал y, такой, что все элементы x меньше y; 2) в любом непустом множестве ординалов существует наименьший элемент.

[5] Нумерация положений изменена так же, как в схеме Рассела. Прист называет эту схему «the inclosure schema» (в переводе В. В. Целищева «схема вложения»).

[6] Конечно, оно и не менее, чем счетно. Это следует уже из того, что на русском языке можно выразить любое натуральное число. Следовательно, по-русски можно, например, сформулировать фразу «n-ный ординал» для любого натурального n.

наименьший элемент X, т. е. наименьший элемент класса неопределимых ординалов. В предыдущем предложении я на (не вполне изящном, но, надеюсь, правильном) русском языке определил ординал y, который принадлежит классу X, а значит, является неопределимым. Противоречие.

Парадокс Кенига получается из схемы Приста посредством следующих подстановок:

- φ – это свойство быть определимым ординалом;
- соответственно, Ω – это класс всех определимых ординалов;
- ψ – это свойство быть определимым классом ординалов;
- δ определяется следующим образом: если $x \subseteq \Omega$, то $\delta(x)$ – это наименьший ординал y, такой, что все элементы x меньше y.

Подставив Ω вместо x в (2) и (3), мы получим $(\Omega \subseteq \Omega \ \& \ \psi(\Omega)) \rightarrow \delta(\Omega) \notin \Omega$ и $(\Omega \subseteq \Omega \ \& \ \psi(\Omega)) \rightarrow \delta(\Omega) \in \Omega$. Поскольку мы определили Ω как класс определимых ординалов, Ω определимо, т.е. мы имеем $\psi(\Omega)$. И поскольку $\Omega \subseteq \Omega$, получаем $\Omega \subseteq \Omega \ \& \ \psi(\Omega)$ и, по modus popens, $\delta(\Omega) \notin \Omega$ и $\delta(\Omega) \in \Omega$, т. е. получаем противоречие.

Отмечу, что парадокс Кенига не является экземпляром схемы Рассела [Priest, 1995, p. 147]. Дело в том, что, если мы, говоря о подклассах Ω, не будем принимать во внимание, имеют ли они свойство ψ, мы не докажем (3) в схеме Рассела: если $x \subseteq \Omega$, то $\delta(x) \in \Omega$. В самом деле, пусть $x \subseteq \Omega$. Если x – определимый класс, то $\delta(x)$ легко определить: это наименьший ординал, не лежащий в x. Но если x неопределим, то нет гарантии, что $\delta(x)$ допускает определение (хотя, конечно, $\delta(x)$ существует). Таким образом, конъюнкт $\psi(x)$ необходим в антецеденте (3). Поскольку же (2) и (3) должны иметь один и тот же антецедент, данный конъюнкт необходим и в антецеденте (2). Наконец, поскольку для получения противоречия мы подставляем Ω вместо x в (2) и (3), нам необходимо условие, что Ω имеет свойство ψ. Таким образом, парадокс Кенига показывает, что схема Рассела имеет ограниченное применение; этим мотивировано ее обобщение до схемы Приста.

3. Парадоксы, метаязыки и метатеории

Парадокс Кенига имеет место не в (той или иной версии) теории множеств, но в более широком теоретическом комплексе, который включает теорию множеств (в той или иной версии) и некоторую теорию языка, на котором строится теория множеств (в изложенном выше варианте парадокса использовался русский язык). Дело в том, что «определение» и «определимость» – это не теоретико-множественные понятия, и говоря об определимости ординалов и классов ординалов, мы не только используем теоретико-множественный язык, но и говорим о нем как об объекте. Таким образом, парадокс Кенига формулируется на метаязыке, для которого язык теории множеств является объектным, и с использованием некоторых тезисов об объектном языке (например, выше использовался тезис, что на объектном языке существует не более, чем счетное множество определений).

Парадокс Бурали-Форти устраняется в аксиоматических теориях множеств, таких как теория Цермелло – Френкеля и теория фон Неймана – Бернайса – Геделя (NBG). Прист находит эти решения неубедительными, поскольку полагает, что в этих теориях парадокс имплицитно воспроизводится [Priest, 1995, pp. 173-174, 179-182]. Ниже я покажу, что когда Прист демонстрирует имплицитное присутствие парадокса Бурали-Форти в аксиоматических решениях, он использует не только теорию множеств, но и ее интерпретацию на метаязыке, поэтому парадокс, который выявляет Прист, уже не является теоретико-множественным. Я разверну этот аргумент на примере NBG [см., например: Adamson, 1998].

В NBG парадокс Бурали-Форти устраняется следующим образом. В этой теории допускается существование классов, которые не принадлежат другим классам. Соответственно, классы делятся на множества и собственные классы: класс x называется множеством, если $x \in y$ для некоторого y, и класс называется собственным классом, если он не является множеством. Ординал, который является множеством, называется ординальным числом. Класс всех ординальных чисел (On) – это ординал, но не ординальное число (если бы он был ординальным числом, он принадлежал бы себе, но в NBG ни один класс себе не принадлежит). Таким образом, в NBG существует бесконечно много ординальных чисел и единственный ординал, который не является ординальным числом (On). Тот факт, что On является собственным классом, блокирует парадокс Бурали-Форти. В самом деле: On – это наименьший ординал, который больше всех своих элементов, следовательно, $\delta(On) = On$[7]. Однако $On \notin On$, следовательно, $\delta(On) \notin On$. Этот результат опровергает тезис о замкнутости On относительно δ, т. е. положение (3) схемы Рассела.

Прист выдвигает против этого способа устранения парадокса следующий аргумент. В NBG мы используем переменные, которые пробегают по всем классам, т. е. их значениями могут быть как множества, так и собственные классы. Неограниченный пробег переменных необходим для доказательства универсальных теорем, таких как $\forall x\ x=x$. Соответственно, если мы хотим интерпретировать NBG как первопорядковую теорию, мы должны построить модель $\langle D, I\rangle$ как упорядоченную пару, содержащую домен (D) и функцию интерпретации нелогических символов (I). При этом домен – это класс, который должен содержать все возможные значения переменных, в частности, собственные классы [Priest, 1995, pp. 139, 181]. Это, по мнению Приста, противоречит тезису, что собственные классы не принадлежат другим классам.

Здесь следует обратить внимание на то, что приведенный аргумент Приста имеет семантический характер: Прист рассматривает интерпретацию языка NBG, соотнося его с некоторой моделью. Но интерпретация языка NBG осуществляется на метаязыке в рамках некоторой метатеории, которая позволяет рассматривать язык NBG как объект. Из этого следует две вещи: 1) тезис Приста, что при интерпретации NBG возникает противоречие, не очевиден: он базируется на посылке, что используемая модель должна описываться интерпретируемой теорией, но этот тезис требует отдельного обоснования, которого Прист не дает; 2) даже если при интерпретации NBG противоречие возникает, это еще не означает, что противоречива NBG: это может говорить о противоречивости метатеории, в рамках которой строится модель.

Приведу еще один (не главный) аргумент Приста. Он предлагает рассмотреть совокупность всех ординалов как единство и обозначает эту совокупность как $On \cup \{On\}$. Но в NBG, по его мнению, такой класс не существует [Priest, 1995, p. 181]. Это ошибка: в NBG для любого класса x существует синглетон {x}, даже если x – собственный класс; при этом, если x – собственный класс, $\{x\} = \emptyset$. В частности, существует {On}, а значит, существует

[7] Строго говоря, в NBG собственный класс не может быть аргументом или значением функции, поэтому здесь выражение «δ(x)» можно понимать как сокращение для «наименьший ординал, который больше всех элементов x».

и On ∪ {On}, и поскольку {On} = ∅, On ∪ {On} = On. Эту ошибку легко исправить: очевидно, Прист хочет рассмотреть некоторый класс, который содержит все ординальные числа, а также On. Поскольку в NBG такого класса не существует, получается, что Прист здесь руководствуется некоторой метатеоретической интуицией. Предположим, эту интуицию можно развить в теорию, и в этой теории можно построить объект с указанными свойствами. Тогда в этой теории, видимо, будет воспроизведен парадокс Бурали-Форти. Можно ли построить такого рода теорию, это открытый вопрос, но важно то, что, если ее построить можно, это будет *другая* теория – не NBG.

Как видим, оба аргумента Приста формулируются на метаязыке и базируются на некоторых метатеоретических предпосылках[8].

Заключение

Парадоксы существуют в контексте теорий или (более или менее формализованных) систем представлений. Парадокс Кенига формулируется с использованием понятия определимости, которое не является понятием теории множеств, следовательно, этот парадокс не является сугубо теоретико-множественным. Парадокс Бурали-Форти в аксиоматических теориях множеств (в частности, в NBG) устранен. Тезис Приста, согласно которому этот парадокс воспроизводится в интерпретации NBG, не имеет под собой достаточного основания. Кроме того, он сформулирован на метаязыке на основе метатеоретических (семантических) представлений, поэтому даже если он верен, парадокс уже не является чисто теоретико-множественным. Это позволяет (вопреки Присту) предположить, что теория множеств может быть свободной от парадоксов.

Список литературы / References

Андрушкевич, А. Г. (2023). Действительно ли необходим запрет на самореференцию? *Эпистемология и философия науки*. Т. 60. № 3. С. 61-67. DOI: 10.5840/eps202360341.

Andrushkevich, A. G. (2023). Is the Ban of Self-Reference Really Necessary? *Epistemology & Philosophy of Science*. Vol. 60. No. 3. Pp. 61-67. DOI: 10.5840/eps202360341. (In Russ.)

Ладов, В. А. (2023a). О принципе единого решения парадоксов. *Эпистемология и философия науки*. Т. 60. № 3. С. 17-30. DOI: 10.5840/eps202360336.

[8] В 2023 г. в «Эпистемологии и философии науки» состоялась панельная дискуссия по вопросу о генезисе парадоксов (в том числе теоретико-множественных). Участники дискуссии обсудили предложенную Ладовым [Ладов, 2023a; Ладов, 2023b] концепцию, согласно которой необходимым условием теоретико-множественных парадоксов является автореферентность, а достаточным условием всех парадоксов, кроме парадокса Бурали-Форти, является негативный характер свойства, по которому определяется релевантный объект [Андрушкевич, 2023; Нехаев, 2023; Олейник, 2023; Суровцев, 2023, Целищев, 2023]. В своем анализе парадоксов Ладов не учитывает их метатеоретические основания и метаязыковой характер их формулировок. На мой взгляд, это как минимум требует уточнения его аргументации. Я планирую более детально обсудить концепцию Ладова и некоторые тезисы, высказанные участниками дискуссии, в одной из последующих публикаций.

Ladov, V. A. (2023a). On the Principle of Uniform Solution to Paradoxes. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 17-30. DOI: 10.5840/eps202360336. (In Russ.)

Ладов, В. А. (2023b). О парадоксах: ответ оппонентам. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 68-76. DOI: 10.5840/eps202360342.

Ladov, V. A. (2023b). On Paradoxes. Reply to Critics. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 68-76. DOI: 10.5840/eps202360342. (In Russ.)

Нехаев, А. В. (2023). Что значит быть лысым и лжецом: новая опция унифицированного подхода к парадоксам. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 48-54. DOI: 10.5840/eps202360339.

Nekhaev, A. V. (2023). What Does it Mean to Be Bald and a Liar? A New Option for a Unified Approach to Paradoxes. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 48-54. DOI: 10.5840/eps202360339. (In Russ.)

Олейник, П. И. (2023). О роли существования парадоксов в программе философии математики неологицизма. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 55-60. DOI: 10.5840/eps202360340.

Oleinik, P. I. (2023). On the Role of the Existence of Paradoxes in the Program of the Philosophy of Mathematics of Neologicism. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 55-60. DOI: 10.5840/eps202360340. (In Russ.)

Прист, Г. (2022). *За пределами мысли.* Пер. с англ. В. В. Целищева. М.: Канон+.

Priest, G. (2022). *Beyond the Limits of Thought.* Tselishchev, V. V. (transl.). Moscow. (In Russ.)

Суровцев, В. А. (2023). Б. Рассел, Г. Прист и принцип единого решения логико-семантических парадоксов. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 38-47. DOI: 10.5840/eps202360338.

Surovtsev, V. A. (2023). B. Russell, G. Priest and the Principle of Uniform Solution to Logical and Semantical Paradoxes. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 39-47. DOI: 10.5840/eps202360338. (In Russ.)

Целищев, В. В. (2023). Поиски единообразного решения парадоксов: иллюзия простоты. *Эпистемология и философия науки.* Т. 60. № 3. С. 31-38. DOI: 10.5840/eps202360337.

Tselishchev, V. V. (2023). The Search for a Uniform Solution to Paradoxes: the Illusion of Simplicity. *Epistemology & Philosophy of Science.* Vol. 60. No. 3. Pp. 31-38. DOI:-10.5840/eps202360337. (In Russ.)

Adamson, I. (1998). *A Set Theory Workbook.* Boston, Basel, Berlin. Birkhäuser.

Priest, G. (1995). *Beyond the Limits of Thought.* Cambridge. Cambridge University Press.

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is.* Cambridge. Cambridge University Press.

Сведения об авторе / Information about the author

Борисов Евгений Васильевич – доктор философских наук, главный научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Николаева, 8, e-mail: borisov.evgeny@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-6587-9616

Статья поступила в редакцию: 11.08.2024
После доработки: 16.09.2024
Принята к публикации: 30.09.2024

Borisov Evgeny – Doctor of Philosophical Sciences, Chief Researcher of the Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva Str., 8, e-mail: borisov.evgeny@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-6587-9616

The paper was submitted: 11.08.2024
Received after reworking: 16.09.2024
Accepted for publication: 30.09.2024