УДК 160.1, 510.6

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ: ГОВОРИТ ЛИ ОНА О НЕПОЛНОТЕ МАТЕМАТИКИ?

С. Л. Катречко
Государственный академический университет гуманитарных наук (г. Москва)
skatrechko@gmail.com

Аннотация. В докладе будет предложен некоторый методологический подход («метод устранения монстров»), восходящий к И. Лакатосу («Доказательство и опровержение»), к анализу теоремы Геделя, который показывает, что несмотря не свою математическую корректность, теорема Геделя неприменима к математике (рекурсивной арифметики), поскольку геделевское выражение является не формулой, а формулоидом (А. С. Есенин-Вольпин), или математическим «монстром», который должен быть устранен из области (языка) математики. Это позволяет «снять» геделевский тезис о неполноте математики, хотя не отменяет задачи позитивного доказательства ее полноты.

Ключевые слова: теорема Геделя о неполноте, метод устранения монстров (Лакатос), формулы и формулоиды, ультраинтуиционизм (Есенин-Вольпин).

Для цитирования: Катречко, С. Л. (2023). Теорема Геделя о неполноте: говорит ли она о неполноте математики? *Respublica Literaria.* Т. 4. № 4. С. 82-87. DOI: 10.47850/RL.2023.4.4.82-87

GOEDEL'S INCOMPLETE THEOREM: DOES IT SAY SOMETHING ABOUT THE INCOMPLETENESS OF MATH

S. L. Katrechko
State Academic University of the Humanities (Moscow)
skatrechko@gmail.com

Abstract. The report will propose some methodological approach ("method of eliminating monsters") going back to Lakatos ("Proof and refutation") to the analysis of Godel's theorem, which shows that despite its mathematical correctness, Godel's theorem is not applicable to mathematics (recursive arithmetic), since the Gödel expression is not a formula, but a formulaoid (Yesenin-Volpin), or a mathematical "monster" that must be eliminated from the field (language) of mathematics. This makes it possible to "remove" Godel's thesis about the incompleteness of mathematics, although it does not cancel the task of positively proving its completeness.

Keywords: Gödel's incompleteness theorem, monster elimination method (Lakatos), formulas and formulaoids, ultraintuitionism (Yesenin-Volpin).

For citation: Katrechko, S. L. (2023). Goedel's Incomplete Theorem: Does it Say Something about the Incompleteness of Math. *Respublica Literaria.* Vol. 4. no. 4. pp. 82-87. DOI: 10.47850/RL.2023.4.4.82-87

1. Теорема Геделя о неполноте математики (1930–1931 гг.) является важным мета-теоретическим результатом о природе формальных систем и подвергается многочисленным философским интерпретациям. Ей посвящена обширная литература [см., например: Подниекс, 1992; Беклемишев, 2010; Успенский, 2007]. С одной стороны, эта теорема является

общепризнанным результатом, хотя предпринимаются отдельные попытки (математиками и около-математиками) показать: 1) ошибочность данной теоремы (доказательства) и 2) доказать полноту арифметики (или теории множеств). С другой стороны (хотелось бы обратить на это особое внимание), большинство работающих математиков продолжают использовать математические теории как вполне адекватные модели реальности, позволяющие осуществлять расчеты (например, космических полетов), которые вполне применимы / реализуемы на практике. И если даже для каких-то математических теорем в течение долгого времени нет доказательства, то математики ищут доказательства и стремятся доказать их: достаточно показательным здесь является недавнее доказательство «последней теоремы Ферма» (1637–1994 гг.), которое искали более чем 300 лет. Как пишет по этому поводу С. Феферман, *a la* геделевские результаты о неполноте математики (теории множеств, арифметики) «совершенно нерелевантны к интересам большинства [современных] работающих математиков [99,9 %]» [Feferman, 2006, p. 439]. А это означает, что математические теории или их «рабочие» фрагменты (с которыми работают математики) прагматически «полны», и геделевская ситуация истинных, но не доказуемых математических утверждений (теорем) не возникает. В этом смысле можно говорить о некоторой парадоксальной ситуации (парадоксе) «формальной неполноты vs прагматической полноты» достаточно богатых математических теорий (типа арифметики).

2. Критики теорем о неполноте Геделя используют несколько (4–5) разных стратегий. Первая из них (см., например, работы А. В. Бессонова [Бессонов, 2020]) осуществляет математическую критику самих теорем или их доказательств (при этом нужно отличать оригинальные теоремы самого Геделя и их многочисленные переформулировки, и интерпретации, что выше мы обозначили как *a la* геделевские результаты). Хотя при этом остается вопрос о доказательстве полноты математики. Вторая стратегия реализует (в той или иной мере) путь, который сформулировал сам К. Гедель в пост-примечании 48а к своей работе «О принципиально неразрешимых положениях в системе Principia Mathematica и родственных ей системах»: «Истинная причина неполноты, присущей всем формальным системам математики, заключается в том, что образования все более высоких типов могут быть продолжены в трансфинитное ... Ведь можно показать, что построенные здесь неразрешимые предложения становятся разрешимыми всякий раз, когда добавляются соответствующие высшие типы [бесконечности] …» [Gödel, 1931, p. 190]. По сути, именно этот путь усиления дедуктивных возможностей систем (с целью доказательства непротиворечивости / полноты этих систем) реализовал Г. Генцен в своем доказательстве непротиворечивости арифметики, используя для этого трансфинитную индукцию, а с 1960-х гг. этот подход развивают Г. Крайзель, Г. Такеути и особенно С. Феферман [см.: Feferman, 1996], а также сообщение А. Есенина-Вольпина [Есенин-Вольпин, 1995]. Разновидностью данной стратегии (хотя ее можно трактовать и как особый путь преодоления ограничительных теорем), которую развивает сам Гедель в своей более поздней «диалектической» статье о «расширении финитной точки зрения» [Gödel, 1958], выступает «усиление» математических теорий не за счет «высших» типов бесконечности, а путем введения (использования) в математических теориях новых, более сложных (высоких) типов абстракции. Третья стратегия состоит в «ослаблении» неполных математических теорий с целью запрета формулировки в них неразрешимых предложений и, соответственно, доказательства

их (теорий) полноты. Таковыми (полными) являются не только исчисления предикатов (см. теорему полноты для исчисления предикатов К. Геделя 1929 г.), но и «усеченные» арифметики Пресбургера (арифметика с одной операцией сложения) и / или Сколема (арифметика с одной операцией умножение), но в данном случае речь идет о некоторых, претендующих на полноту, подсистемах арифметики второго порядка [Simpson, 2009] или проекте «обратной математики» Н. Фридмана [Friedman, 1975; см. также: Reverse mathematics], основная идея которого («обратной математики») состоит в том, что начинать нужно не с аксиоматики, а с анализа математических теорем с целью выявления необходимых (релевантных) для ее доказательства аксиом (способов доказательств), среди которых не будет использованных при доказательстве теорем Геделя «диагональных» рассуждений. Четвертая стратегия имеет методологический характер и состоит в более строгом анализе математического знания. Она реализована в работах А. С. Есенина–Вольпина. В своем сообщении 1995 г. он проводит различение между [математическими] *формулами* и *формулоидами*. В свете этого различения геделевские выражения относятся уже не к формулам, а к формулоидам (математическим «монстрам», сформулированным на метаязыке), и поэтому должны быть устранены из числа («языка») собственно математических формул. В общем случае А. С. Есенин-Вольпин развивает методологию программы обоснования математики *ультраинтуиционизма* [Есенин-Вольпин, 1996], одной из составляющей которой выступает в том числе и более внимательный анализ модальности используемых математических выражений (заметим, что эта программа обоснования математики во многом коррелирует с программой *предикативизма* Б. Рассела / С. Фефермана).

3. Предлагаемый нами подход к преодолению ограничительного эффекта теорем Геделя (resp. разрешению выявленного парадокса в п. 1) концептуально близок к методологическому подходу из 4-й стратегии. Для его реализации мы воспользуемся методологией И. Лакатоса из его работы «Доказательства и опровержения» (1963–1967) [Лакатос, 1967], хотя точнее назвать это не методологией самого Лакатоса, а «математической» методологией, описанной Лакатосом при анализе им истории теоремы Эйлера о многогранниках (о соотношении вершин, ребер и граней многогранников): *V (вершины) – E (ребра) + F (грани) = 2*. В частности, обычный куб (как правильный многогранник) удовлетворяет теореме Эйлера, т. е. ее положению о том, что соотношение вершин, ребер и граней многогранника = 2. Однако, если рассмотреть другой многогранник, например, комбинацию из двух многогранников (кубов), когда маленький куб располагается на большом кубе, и рассматривать эту конструкцию как новый многогранник, то теорема Эйлера для этого многогранника не выполняется (хотя, естественно, теорема Эйлера выполняется для двух – большого и малого – кубов по отдельности). В данном случае можно воспользоваться одним из методов преодоления подобных «опровергающих» примеров, а именно *методом исправления монстров*, в рамках которого мы «исправляем» монстра из двух кубов и рассматриваем его как совокупность из двух отдельных кубов, для которых теорема Эйлера верна. Причем здесь Лакатос не столько придумывает способы преодоления опровержений исходной теоремы (теоремы Эйлера), сколько воспроизводит ее новые (модифицированные) доказательства в ответ на предлагаемые опровержения в ходе последующего развития математической практики.

В нашем случае применим другой мощный способ борьбы с опровержениями, каковым выступает *метод устранения монстров* (или его модификация под именем *метод устранения исключений*), который состоит в том, что те якобы многогранники, опровергающие теорему Эйлера, объявляются не-многогранниками (за счет уточнения определения многогранника), а «монстрами», и, тем самым (после устранения / исключения данного монстра), исходная теорема остается верной. Самореферентные (геделевские) выражения (типа «парадокса лжеца») из теоремы Геделя можно было бы считать подобными «монстрами» (аналогично «неправильным» многогранникам из теоремы Эйлера), т. е. «неправильными» математическими выражениями или *формулоидами* (в метаязыке), как это сделано А. Есениным-Вольпиным (см. выше), в отличие от огромного большинства нормальных («реальных») математических выражений, с которыми имеет дело реально работающий математик[1]. Соответственно, не подвергая сомнению результат (доказательство) теоремы Геделя (как это предполагается в рамках первой стратегии), можно было бы уменьшить (сократить) область собственно математических выражений (математического языка), исключив из их числа подобные геделевские самореферентные предложения или другие возможные «монстры / формулоиды» (Лакатос называет это стратегией «отступления в заведомо безопасную область»). В этом случае геделевский результат о неполноте математики будет ничтожным, поскольку не будет распространяться на область собственно математики, хотя, конечно, в дополнение к этой негативной процедуре «устранения монстров» следует доказать «позитивную» теорему о полноте арифметики (как в случае с теоремой Эйлера). Тем самым мы сокращаем область математического, исключая из нее класс самореферентных (геделевских) выражений (типа парадокса лжеца или других парадоксов) и, соответственно, блокируем действие теоремы Геделя о неполноте (и им подобных), за счет чего сохраняем возможность обоснования полноты математики для оставшихся 99 % математической области.

Список литературы / References

Беклемишев, Л. Д. (2010). Теоремы Геделя о неполноте и границы их применимости. *Успехи математических наук*. Т. 65. Вып. 5 (395). С. 61-106.

Beklemishev, L. D. (2010). Gödel's theorems on incompleteness and the limits of their applicability. *Russian Mathematical Surveys.* Vol. 65. Iss. 5 (395). pp. 61-106. (In Russ.)

---

[1] Обратим внимание на следующее обстоятельство. Гедель к своим контрпримерам сам относился крайне осторожно, понимая их искусственный характер для математической практики, точно также как расселовский парадокс лжеца выступает крайне экзотическим выражением для обычной языковой практики. Подобные «контрпримеры», конечно, существуют в языке, но на его периферии и практически не влияют на реальную практику словоупотребления. Реальными примерами собственно математических неразрешимых проблем для Геделя выступала проблема Гольдбаха и / или теорема Ферма (после ее доказательства в 1994 г. она выбыла из данного списка), которые в своих текстах Гедель сравнивал со своей теоремой о неполноте и называл предложенные там неразрешимые предложения проблемой *гольдбаховского типа* [Gödel, 1931, p. 196; см. также: Gödel, 1986, p. 190, 202)]. В этом смысле теоремы Геделя указывали на возможность неразрешимых математических выражений. В настоящее время таковым (математическим примером неразрешимой проблемы) выступает, например, теорема Париса – Харрингтона (1977).

Бессонов, А. В. (2020). Еще раз о неверных истолкованиях второй теоремы Геделя о неполноте. *Сибирский философский журнал*. Т. 18. № 3. С. 132-143.

Bessonov, A. V. (2020). Once again about Misinterpretations of Gödel's second Theorem on Incompleteness. *Siberian Journal of Philosophy*. Vol. 18. no. 3 pp. 132-143. (In Russ.)

Есенин-Вольпин, А. С. (1995). Формулы или формулоиды. *XI международная конференция «Логика, методология, философия науки»*. Москва-Обнинск. Т. 1. С. 29-32.

Yesenin-Volpin, A. S. (1995). Formulas or Formulaoids. In *XI International Conference "Logic, Methodology, Philosophy of Science"*. Moscow-Obninsk. Vol. 1. pp. 29-32. (In Russ.)

Есенин-Вольпин, А. С. (1996). Об антитрадиционной (ультра-интуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении. *Вопросы философии.* № 8. С. 100-136.

Yesenin-Volpin, A. S. (1996). On the Anti-traditional (ultra-intuitionistic) Program of the Foundations of Mathematics and Natural Science Thinking. *Questions of Philosophy*. no. 8. pp. 100-136. (In Russ.)

Лакатос, И. (1967). *Доказательства и опровержения (как доказываются теоремы).* М.: Наука.

Lakatos, I. (1967). *Proofs and Refutations (how theorems are proven).* Moscow. (In Russ.)

Подниекс, К. М. (1992). *Вокруг теоремы Геделя*. Рига: Зинатне.

Podnieks, K. M. (1992). *Around Gödel's theorem*. Riga. (In Russ.)

Успенский, В. А. (2007). Теорема Геделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней [Электронный ресурс]. *VII Летняя школа «Современная математика» (Дубна, 19-30 июля 2007 г.)*. URL: https://www.mathnet.ru/PresentFiles/122/122_1.pdf; видео: https://forallxyz.net/a-84 (дата обращения: 20.10.2023).

Uspensky, V. A. (2007). Gödel's theorem on incompleteness and four roads leading to it [Online]. In *VII Summer School "Modern Mathematics" (Dubna, July 19-30, 2007)*. Available at: https://www.mathnet.ru/PresentFiles/122/122_1.pdf; video: https://forallxyz.net/a-84 (Accessed: 20 October 2023). (In Russ.)

Feferman, S. (1996). Godel's Program for new Axioms: Why, Where, How and What? In Hajek, P. (ed.). *Gödel '96. Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel's Legacy. Vol. 6. Lecture Notes in Logic.* Berlin. Springer-Verlag. pp. 3-22.

Feferman, S. (2006). The Impact of Gödel's Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices of the American Mathematical Society.* Vol. 53. no. 4. pp. 434-439.

Friedman, H. (1975). Some Systems of Second Order Arithmetic and Their Use. In *Proceedings of the 1974 International Congress of Mathematicians*. Vol. 1. pp. 235-242.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. In *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Bd. 38(1). pp. 173-198.

Gödel, K. (1958). Über Eine Bisher Noch nicht Benutzte Erweiterung des Finiten Standpunktes. *Dialectica*. Vol. 12. Iss. 3-4. pp. 280-287. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1746-8361.1958.tb01464.x

Gödel, K. (1986). On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I. In S. Feferman, J. R. Dawson, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay, J. van Heijenoort (eds.). *Kurt Gödel. Collected Works*. Vol. 1. New York. pp. 145-195.

Reverse mathematics. [Online]. *Wikipedia*. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics (Accessed: 20 October 2023).

Simpson, St. G. (2009). *Subsystems of Second Order Arithmetic.* (Perspectives in Logic). 2nd ed. Cambridge University Press.

Сведения об авторе / Information about the author

Катречко Сергей Леонидович – доцент, кандидат философских наук, доцент философского факультета Государственного академического университета гуманитарных наук, главный редактор «Трансцендентального журнала»; г. Москва, Мароновский пер., д. 26, e-mail: skatrechko@gmail.com, https://orcid.org/0000–0002–2884–7719.

Статья поступила в редакцию: 20.04.2023
После доработки: 10.10.2023
Принята к публикации: 20.11.2023

Katrechko Sergey – Candidate of Philosophical Sciences, Associative Professor, editor–in–chief "Studies in Transcendental Philosophy", Associate Professor of Faculty of Philosophy, State Academic University of the Humanities, Moscow, Maronovsky Lane, 26, e-mail: skatrechko@gmail.com, https://orcid.org/0000–0002–2884–7719.

The paper was submitted: 20.04.2023
Received after reworking: 10.10.2023
Accepted for publication: 20.11.2023