УДК 165.3:122

СОЮЗ ЗЕНОНА И УЛЬТРАМЕТРИКИ

В. М. Лурье
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
hieromonk@gmail.com

Аннотация. Приводится общий обзор подходов к разрешению парадоксов Зенона в теориях движения в науке Нового времени и в современной. Показано, что в этих подходах что-то одно приносится в жертву: или единство онтологии, или непротиворечивость логики. Приводятся дополнительные доводы в пользу одной из неконсистентных интерпретаций движения (в не-алетической логике; Г. Прист). В частности, предлагается рассматривать топологию физического пространства как ультраметрическую, что находится в духе того направления математической физики (С. Феферман), вдохновленного Пуанкаре, которое предлагает отказаться от использования в физике математических моделей, связанных с континуумом и иррациональными числами.

Ключевые слова: Зенон, парадоксы движения, Лейбниц, Пуанкаре, Феферман, Г. Прист, *p*-адические числа, квантовые логики, неконсистентные логики.

Для цитирования: Лурье, В. М. (2022). Союз Зенона и ультраметрики. *Respublica Literaria.* Т. 3. № 4. С. 40-57. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.40-57

THE ALLIANCE OF ZENO AND ULTRAMETRIC

Basil Lourié
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
hieromonk@gmail.com

Abstract. Zeno’s paradoxes on the motion were resolved, in the Early Modern, Modern, and contemporaneous science, with sacrificing either simplicity of ontology or consistency of logic. I provide additional considerations justifying Graham Priest’s non-alethic approach to the motion. They are based on the possibility of considering the topology of the physical space as ultrametrical instead of continuous. Such an approach could be taken as the next step in development of Solomon Feferman’s mathematical physics (inspired, in its basic ideas, by Poincaré) where the irrational numbers are excluded.

Keywords: Zeno, paradoxes of motion, Leibniz, Poincaré, Feferman, Graham Priest, *p*-adic numbers, quantum logics, inconsistent logics.

For citation: Lourié, B. (2022). The Alliance of Zeno and Ultrametrics. *Respublica Literaria.* Vol. 3. no. 4. pp. 40-57. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.40-57

1. Введение

Подходы к апориям Зенона многочисленны настолько, что любое обсуждение конкретного подхода бывает удобнее начинать с обозначения его места в систематическом каталоге. Я бы построил основные разделы этого каталога так:

1. Подходы философско-логические.
1.1. Скорее философские (онтологические), чем логические.
1.2. Скорее логические, чем философские.
2. Подходы естественнонаучные.
2.1. Основанные на свойствах пространства (топологические).
2.2. Основанные на свойствах физических объектов и процессов (физические).

Это грубая классификация, и ее рубрики не вполне четко отделяются друг от друга, но она создает хоть какие-то берега для моря идей, уже высказанных за последние две с половиной тысячи лет по поводу апорий Зенона. Каждый подход имеет свои достоинства и свои недостатки. Обычно изначальная идея автора очередного подхода попадает в одну из четырех указанных выше рубрик, а в остальных рубриках он следует каким-то своим заранее принятым представлениям. Впрочем, те, кто начинают с философии, не всегда имеют интерес к естественнонаучной стороне дела, а те, кто начинают с естественнонаучной, не всегда считают нужным тратить внимание на философию. Идеальный подход, на мой взгляд, может начинаться в любой из рубрик, но затем распространяться на все.

Подход Игоря Владимировича Берестова [Берестов, 2022] относится четко к категории 2.1: он построен на обсуждении свойств пространства, хотя и содержит некоторые рассуждения об онтологии. С критикой этого подхода уже выступил Евгений Васильевич Борисов [Борисов, 2022], разрушив значительную часть конструкции, возведенной автором. Но, как мы знаем, опровержение конкретной научной теории не может опровергнуть породившую ее научную программу, то есть, скажем, просто, некоторые базовые интуиции, которые за этой теории стояли. Если теория ложная, то интуиции все равно могут быть истинными: просто они еще ждут своей настоящей теории. Вот и в случае подхода И. В. Берестова я вижу сразу две интуиции: онтологическую и топологическую, которые необходимо спасти. Обе они связаны с проблемой разрывов в движении.

На уровне топологии эта проблема возникает у И. В. Берестова тогда, когда он допускает, что некое тело проходит в своем движении открытый отрезок и только его, не проходя границы этого отрезка, а потом движется дальше. Е. В. Борисов в ответ доказывает, что такого не может быть, если мы, следуя принципам классической физики, то есть тем правилам игры, по которым играет сам И. В. Берестов, понимаем под отрезком траектории некий отрезок, точки которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством действительных чисел. По-моему, тут Е. В. Борисов прав, но точно ли права классическая физика в своем допущении, будто точки траекторий движения должны находиться во взаимно-однозначном соответствии множеству действительных чисел?

На уровне онтологии проблема разрыва возникает у И. В. Берестова тогда, когда он обсуждает состояние тела, прошедшего открытый отрезок и только его, т. е. не достигшего границы отрезка. По мнению И. В. Берестова, такое тело оказывается вне пространства и времени, но при этом оно каким-то образом существует. Отсюда у него постулирование двойной онтологии, т. е. двух способов существования: внутри пространства-времени и как-то иначе. Никакого объяснения того, как тело может существовать вне пространства и времени, оставаясь физическим телом, И. В. Берестов не дает. Но если посмотреть на саму ситуацию, которую он моделирует, а не на его объяснения этой ситуации, то мы в ней и не увидим двойной онтологии. Вместо этого мы увидим существование тела только в одной онтологии, – пространственно-временной, но с разрывом в пространстве и времени. Если угодно, можно посчитать это разрывом в самом существовании объекта, но я просто бы назвал такую онтологию дискретной. Примером такой онтологии в физике стал квантовый постулат Нильса Бора 1913 г. (это еще до создания квантовой механики) – о модели атома в рамках классической физики, но с одним отличием: электроны перемещаются из состояния в состояние, т. е. с орбиты на орбиту, минуя промежуточное пространство [Bohr, 1981]. В этой модели, реалистичность которой нас в данном случае не интересует, электроны обладали дискретной онтологией, но при этом во всем остальном подчинялись законам классической физики.

Почему И. В. Берестов выбрал в качестве интерпретации своей физической модели двойную, а не дискретную онтологию? Думаю, потому, что дискретность онтологии противоречит базовым интуициям науки Нового времени, включительно до ее античных корней. Это интуиция непрерывности, т. е. отсутствия разрывов и противоречий (онтологические разрывы обычно подразумевают логические противоречия). Парадоксы Зенона выявляют проблематичность этой интуиции. Даже если она верна, то ее надо как-то специально защищать, и нельзя сказать, чтобы с защитой все было так уже хорошо. Если было бы хорошо, – мы бы не обсуждали эти парадоксы столько тысячелетий.

Если нас не вполне удовлетворил полученный И. В. Берестовым результат, то постараемся пройти этот путь заново, начав в том же месте, где и Игорь, – с критики теории движения Бертрана Рассела [Russell, 2009]. Вслед за Гремом Пристом, я предпочту называть расселовскую трактовку движения кинематической, поскольку суть ее в том, что движение не является свойством движущего тела, будучи, подобно расстоянию, понятием реляционным.

Б. Рассел уходит от возражения Зенона относительно невозможности поставить в соответствие конечному числу моментов времени бесконечное число точек бесконечно делимого пространства. При этом Б. Рассел не перестает считать пространство бесконечно делимым, каковым считал его и Зенон. Выход, который находит Б. Рассел, И. В. Берестов перефразирует так:

(RM) *Точечный объект движется в течение невырожденного временно́го интервала I_t ттттк имеется функция f, ставящая в соответствие всем моментам времени из I_t пространственные точки, в которых этот объект находится в эти моменты времени, и f не является константной функцией на I_t.*

В такой перефразировке Б. Рассела сохраняется его главная идея – идея о том, что моментам времени должны соответствовать не точки, а интервалы пространства, - но скрывается другая, не менее важная идея – о том, что пространство мыслится бесконечно делимым. Очевидно (и, видимо, именно по этой причине специально у Б. Рассела не оговаривается), что бесконечная делимость пространства подразумевает взаимно-однозначное соответствие между точками любой траектории движения в этом пространстве и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. И. В. Берестов понимает Б. Рассела именно так, хотя и не оговаривает это условие в своей формулировке (RM); впрочем, было бы трудно понять Б. Рассела иначе.

Даже если признать критику кинематической трактовки движения у И. В. Берестова неудачной, останется еще немало других возражений Б. Расселу, сделанных, исходя из различных предпосылок. Мы остановимся только на трех – тех, которые пригодятся и для нашего дальнейшего рассуждения. Не обращаясь пока к философии, мы возьмем аргументы из трех остальных разделов нашей классификации – физики, математики и логики.

2. Альтернативы кинематической теории

2.1. Физический аргумент против кинематической теории движения

Физический аргумент против кинематического понимания движения является одним из наиболее очевидных. Да, – можно ответить Б. Расселу, – кинематическая трактовка разрешает парадокс стрелы (по крайней мере, на словах), но она не разрешает парадоксов дихотомии и черепахи. Чтобы догнать черепаху, Ахиллесу требуется пройти бесконечное число отрезков за конечное время. Сумма длин этих отрезков сходится к конечному числу, но это число оказывается предельным значением при условии стремления количества этих отрезков к бесконечности (та же проблема в парадоксе дихотомии). Согласно кинематической трактовке движения, для достижения этого конечного числа потребуется бесконечное число моментов времени, то есть бесконечное время, тогда как за любой конечный период времени Ахиллес будет лишь асимптотически приближаться к черепахе. Поскольку расселовское движение аддитивно, Ахиллес не сможет (раньше, чем в бесконечности) перепрыгнуть с асимптотической траектории на ее предельное значение.

Надо заметить, что сам Б. Рассел ощущал трудности для его теории, вызванные бесконечными числами, хотя и был настроен оптимистически: «Some purely arithmetical peculiarities of infinite numbers have also caused perplexity. For instance, an infinite number is not increased by adding one to it, or by doubling it. Such peculiarities have seemed too many to contradict logic, but in fact they only contradict confirmed mental habits» [Russell, 2009, p. 147]. Но все же Б. Рассел эти трудности недооценивал.

Б. Рассел строил свою концепцию движения как преимущественно математическую спекуляцию, лишь минимально рассматривая данные физики (в нашей классификации – это типичный подход типа 2.1). Тем не менее, он эксплицировал интуиции, заложенные в понимание движения классической физикой. Поэтому очень поучительно наблюдать, как фактически ту же концепцию Б. Рассела (не ссылаясь на Б. Рассела) реконструирует физик, которому важно эксплицировать математически то, что говорит о движении классическая физика [Nikolenko, 2012; Николенко, 2019а, 2019б]. А. Д. Николенко[1], одну из более ранних работ которого упоминает также И. В. Берестов, – яркий представитель подхода типа 2.2, физического. Становясь на точку зрения классической физики (не потому, что он ее разделяет, а рассуждения ради), А. Д. Николенко все равно выводит

[1] Первый инициал Николенко меняется в зависимости от выбора языка: по-украински он Олександр Данилович, по-русски – Александр.

ту же кинематическую теорию движения – как функции от моментов времени к интервалам пространства. Зенон, как подчеркивает и А. Д. Николенко, разбивает своими апориями концепцию движения в классической физике как таковую. Математические формулы, которыми классическая физика, верно, описывает явления, связанные с движением в макромире, не следуют из нее самой.

В физическом мире невозможно перепрыгнуть из асимптотической кривой к ее пределу. Мы это хорошо знаем, например, по процессу радиоактивного распада, который (не теоретически, но практически) является бесконечным, и поэтому для его характеристики выбирается период полураспада. Но для характеристики механического движения нам нет нужды брать «период полупрохождения траектории», а вполне возможно оценивать полное время ее прохождения. Классическая механика, в которой движение аддитивно (и в этом оно аналогично аддитивности процесса радиоактивного распада), неспособна объяснить, почему. Такое объяснение потребует отказа от аддитивности и, следовательно, от самой классической физики.

Тут будет недостаточно вспомнить, что классическая физика у нас недавно (в 1926 г.) стала предельным случаем квантовой. Копенгагенская интерпретация квантовой физики дает возможность, пусть и не предусмотренную авторами этой интерпретации Нильсом Бором и Вернером Гейзенбергом, реинтерпретировать кинематическую теорию движения как движение квантованное, в котором движущийся объект «размазан» по некоторым минимальным интервалам траектории движения. В такой интерпретации парадоксы Зенона будут блокированы. Уже появились – причем независимо друг от друга – работы, в которых Копенгагенская интерпретация квантовой физики экстраполируется на движение в макромире. Константин Антонопулос рассуждает об этом преимущественно философски [Antonopoulos, 2003; Antonopoulos, 2004; Antonopoulos, 2007][2], а А. Д. Николенко – строго физически, так что даже оценивает длины волн, присущие макрообъектам по причине корпускулярно-волнового дуализма (используя планковскую длину) [Nikolenko, 2012].

В подходе К. Антонопулоса и А. Д. Николенко физическое пространство остается бесконечно делимым, каким оно было и в Копенгагенской интерпретации квантовой физики, но квантованным становится само движение. Если признавать Копенгагенскую интерпретацию полной, как на этом настаивали ее создатели, то, вероятно, и для классической физики у нас не останется ничего, кроме ее пересмотра в духе К. Антонопулоса и А. Д. Николенко. Но я все же предложу ниже отнестись с бóльшим вниманием к современной критике Копенгагенской интерпретации как неполной, и, исходя из этого, сделать некоторые выводы относительно апорий Зенона. Используя знаменитый термин Нильса Бора, я бы хотел предложить новый подход, *дополнительный* к подходу К. Антонопулоса и А. Д. Николенко, т. е. подход, хотя и несовместимый с их подходом, но и не отрицающий его.

[2] По мнению автора, эта логика нарушает только закон исключенного третьего, но не закон непротиворечия, то есть он ее считает паракомплектной, но не параконсистентной. Это соответствует одной из интерпретаций квантовой механики Ньютона да Косты и его соавторов (хотя К. Антонопулос на них не ссылается) [см.: French, Krause, 2006; da Costa, de Ronde, 2014; Krause, Arenhart, 2019].

2.2. Математический аргумент против кинематической теории движения

Собственно математический, или топологический аргумент против кинематической теории движения выдвинут в недавней серии работ А. Д. Николенко, из которых самая последняя и подробная «О понятии движения и неизбежности его квантования» [Николенко 2019а, 2019б]. Коль скоро в классической физике мы не имеем дела с квантовыми объектами «копенгагенского» типа, движущийся объект не может быть «размазан» по всему интервалу траектории, который ставится в соответствие моменту времени. Тогда нужно все-таки ответить на вопрос, который Б. Рассел обходит: каким образом движущемуся объекту удается пройти интервал, соответствующий одному моменту времени. Коль скоро речь не пойдет об изменении, зависящем от времени, то здесь нельзя будет сказать и о движении в физическом смысле. Можно вообще не называть это движением, но лучше назвать движением в смысле обобщенном, в котором движение – это некое изменение, не обязательно связанное с понятием времени.

В недавней работе А. Д. Николенко «О понятии движения и неизбежности его квантования» [Николенко, 2019а, 2019б] возможность такого рода вневременного движения внутри интервала была подробно исследована, но нам достаточно только одного результата, который довольно очевиден уже из логики (см. следующее возражение против кинематической трактовки движения): для возможности движения необходимо, чтобы внутри интервала различались две соседние позиции движущегося объекта, а это исключено в тех интервалах, которые обладают свойством бесконечной делимости, или, выражаясь математически, свойством плотности (плотность множества подразумевает, что между двумя любыми его элементами найдется третий, – это и есть свойство бесконечной делимости)[3]. Поэтому движение блокируется, как это и показывает «Дихотомия» Зенона, в интервалах, элементы которых могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие таким плотным множествам, как, например, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ или, хотя оно и менее плотное, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Вот множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не создавало бы подобных проблем, поскольку оно не обладает бесконечной делимостью, однако, его нельзя взять в качестве модели физического пространства по той же причине, что и $\mathbb{Q}$: оно не обладает полнотой. Поля как рациональных, так и натуральных чисел похожи не на сплошное полотно, а на сетку, более редкую (натуральные числа) или более плотную (рациональные числа), но не сплошную. «Сетка» отличается от «полотна» согласно критерию полноты Огюстена Коши: смысл его в том, что метрическое пространство является полным, когда расстояние между двумя любыми его элементами оказывается меньше любого положительного числа[4]. В годы жизни Коши (1789–1857 гг.) и вообще в математике XIX века требование полноты вынуждало соотносить физическое пространство с полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

---

[3] Отметим, что все возражения, основанные на бесконечной делимости, актуальны также для объяснения движения при помощи гиперреальных чисел и нульпотентов (эти попытки, со своих позиций, критикует и И. В. Берестов), поскольку и в этих случаях мы не уходим от бесконечной делимости.

[4] Говоря более строго – когда каждая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к элементу этого же пространства. Критерий Коши определяет понятие фундаментальной последовательности: это такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства (X, ρ), в которой для всякого $\varepsilon > 0$ имеется $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n, m > N$ исполняется условие $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Насколько я знаю, никто еще не предлагал разрешения апорий Зенона о движении через альтернативную топологию, поскольку не только классическая физика, но также и квантовая физика (за исключением редких интерпретаций, о чем мы скажем ниже), и общая теория относительности одинаково привержены модели физического пространства как пространства не квантифицированного, т. е. не гранулированного, но бесконечно делимого [см. особенно: Mortensen, 2007][5]. Я все-таки думаю, что альтернативную топологию предложить тут следует, что я и собираюсь сделать ниже. Общая теория относительности уже составила прецедент решения проблем классической физики уходом от ее топологии. Это вдохновляющий пример, хотя та неэвклидова геометрия, которая используется в ОТО, и даже те многомерные топологии Калуцы со свернутыми измерениями, которые используются в различных вариантах теории струн, нам не помогут. Чтобы узнать, что же нам могло бы помочь, нужно посмотреть, нельзя ли множество рациональных чисел дополнить до соответствия критерию полноты Коши чем-то другим, а не иррациональными числами. С 1897 г. мы знаем, что можно, и с 1916 г. мы знаем, что это можно сделать только единственным способом: взять вместо иррациональных чисел p-адические[6], получив таким образом поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. На перспективах такого подхода мы остановимся ниже.

2.3. Логический аргумент против кинематической теории движения

Тот из логических аргументов, который будет нас интересовать, параллелен математическому, рассмотренному выше: он также утверждает, что кинематическая теория исключает само понятие изменения, значит, и движения тоже. В кинематической теории невозможно указать, где и как произошло изменение. Этот аргумент сформулирован Гремом Пристом.

Предположим, в некотором положении для движущегося тела некая пропозиция p является истинной, а потом это тело перемещается в такое положение, где вместо нее будет истинна пропозиция $\neg p$. А где же это случилось? Если момент столь радикального изменения не отслеживается, значит, кинематическая теория непригодна для объяснения как движения, так и вообще процессов изменения [Cf.: Priest 2006, pp. 160-162, 167-171; Mortensen 2020].

Г. Прист делает из этого вывод, который он сам считает теорией движения Гегеля: движение подразумевает противоречие («motion is a continuous state of contradiction» [Priest, 2006, p. 171]), причем, не контрарное (нарушающее только принцип исключенного третьего), а контрадикторное, $p \wedge \neg p$, которое нарушает одновременно принцип исключенного третьего и принцип непротиворечия. Логика, допускающая подобные противоречия, пока что не получила общепринятого названия, и мы воспользуемся одним из употребительных названий – не-алетическая. Не-алетическая логика является сразу и паракомплектной (допускающей контрарные противоречия, т. е. нарушение принципа исключенного третьего),

---

[5] Мортенсен, однако, не знает о работах, связанных с построением квантовой физики без $\mathbb{R}$.

[6] В 1897 г. p-адические числа были впервые описаны Куртом Гензелем, а в 1916 г. Александр Островский опубликовал свою теорему Островского, смысл которой в том, что множество рациональных чисел может иметь только два типа пополнения – иррациональными числами или p-адическими (чуть более строго это можно сформулировать так: любая нетривиальная норма на $\mathbb{Q}$ эквивалентна либо действительной норме $|x|$, либо p-адической норме $|x|_p = p^{-n}$, где p – простое число, n – натуральное число).

и параконсистентной (допускающей субконтрарные противоречия, т. е. нарушение принципа непротиворечия как такового). Как уже известно, разным типам логики соответствуют разные топологии [Mortensen, 2010], и как раз не-алетической логике соответствует ультраметрическая топология, т. е. топология поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Мы остановимся на этом ниже.

3. $\mathbb{Q}_p$ вместо $\mathbb{R}$

3.1. Квантовая механика в поле $\mathbb{Q}_p$

Если непрерывность нашего физического пространства соответствует полю p-адических чисел (такое пространство называется ультраметрическим), то физическое пространство не является бесконечно делимым, и парадоксов Зенона в нем не возникает. Однако, идея использовать $\mathbb{Q}_p$ в качестве модели физического пространства впервые возникла безотносительно к парадоксам Зенона – в квантовой механике, перейдя затем и в теорию струн[7], но на этом едва ли не остановившись (впрочем, и тут не без исключений, о чем мы скажем ниже). Один из создателей той, ранней p-адической квантовой механики, А. Ю. Хренников, впоследствии развил свой собственный p-адический вариант квантовой механики [см., в частности: Khrennikov, 1997; Khrennikov, 2016] и сделал ряд важных, но спорных, философских выводов. Детали его теории эволюционировали, но философские выводы не менялись.

Самое главное, что, по его мнению, удалось «спасти» при помощи p-адического пространства в микромире – это «реализм», пошатнувшийся в Копенгагенской интерпретации квантовой механики (это стандартный упрек в отношении Бора и Гейзенберга со стороны всех, кто с ними не согласен). Копенгагенская интерпретация, по его мнению, почти достоверна, но неполна, а применение принципа Гейзенберга к индивидуальным частицам неправомерно: он относится только к вероятностям. В ультраметрическом пространстве не возникает непреодолимого препятствия к одновременному определению координаты и импульса индивидуальной частицы.

Эта ситуация не может нам не напомнить приведенные выше физический и математический аргументы против кинематической теории движения в макромире: мы должны или распространить на макрообъекты боровский «отказ от реализма», либо поменять поле действительных чисел на поле p-адических чисел. Мне представляется, что в p-адической квантовой механике произошло то же самое. А. Ю. Хренников, впрочем, не согласился бы с таким выводом. По его мнению, физическое пространство не является единым, но делится на две больших области: в макромире оно соответствует полю действительных чисел, а в микромире – полю p-адических чисел. Впрочем, свое мнение

[7] Начало этому было положено работами В. С. Владимирова и И. В. Воловича в 1980-е гг.; тогда же, в 1990 г., появились первые работы тесно с ними сотрудничавшего А. Ю. Хренникова [см.: Vladimirov, Volovich, Zelenov, 1993].

о пространстве макромира он никак не обосновывает, а просто верит традициям физической науки. Между тем, предположение о том, что у нас не одно физическое пространство, а два разных – это существенное усложнение онтологии, которое невозможно принять без очень весомых аргументов. Я не думаю, что такие аргументы можно найти.

Матти Питкянен распространяет p-адический подход на пространство макромира, причем, не только на космологию. Он, однако, считает, что физический мир сразу и p-адичен, и «действителен», и нужно найти способ соединения обеих картин в единую когерентную картину Физики с большой буквы[8]. В его картине мира вся физическая реальность оказывается квантованной через масштабируемую постоянную Планка.

Если пространство микромира находится в соответствии с p-адическими, а не действительными числами, то это уже само по себе серьезный довод в пользу того, что и пространство макромира устроено подобным же образом. Предположение М. Питкянена относительно существования некоторого единого числового поля, которое объединяет поле действительных и поле p-адических чисел, пока что остается предположением, и еще вопрос, точно ли оно так уж необходимо для физики.

Но посмотрим, какие еще доводы можно привести в пользу предположения о p-адичности всей физической реальности. Я нахожу их еще два (так что всего у меня основных доводов получится три): один собственно в физике, а другой в топологии и соответствующей ей логике.

3.2. Физика в пользу $\mathbb{Q}_p$: фракталы

Общие сведения о p-адических числах здесь можно не излагать, но я обращу внимание только на некоторые их свойства. В этом разделе речь пойдет о физике. Соответствующее предположение о физическом пространстве гармонирует с вездесущием в физическом мире масштабирующихся структур, т. е. фракталов.

Через p-адическую норму мы можем определить расстояние (метрику) $d_p(x, y) =: |x - y|_p$. Это расстояние в p-адических координатах и соответствует фрактальной метрике, гомеоморфной множеству Кантора. Например, для $p = 3$ мы получим структуру, подобную треугольнику Серпинского: расстояние между всеми натуральными числами будет самым большим, т. е. равным единице, расстояние 1/3 будет между элементами внутри трех групп чисел (0, 3, 6), (1, 7, 4) и (2, 8, 5); далее, вокруг каждого из этих 9 чисел возникает своя тройка чисел, между которыми расстояние 1/9 (например, вокруг 0 – (0, 9, 18)) и т. д., т. е. имеет место то самое масштабирование, которое создает структуру фрактала. То же самое можно показать на примере дерева, структура которого также фрактальна[9]: высшим в иерархии является ствол, а дальше происходят на каждом уровне свои разветвления. Если дерево природное, то в нем может быть сложная, хотя и аналогичная структура: не p-адическая,

[8] Он ставит проблему, буквально, так: “Is the basic physics p-adic or real <…> or both? If it is both, how should one glue the physics in different number field together to get *the* Physics?” [Pitkänen, 2016, p. 21].

[9] Фрактальной структуре деревьев и других растений посвящены исследования Аристида Линденмайера; см. [Prusinkiewicz, Lindenmayer, 1990].

а m-адическая (где m – любое натуральное число, не обязательно простое) и даже M-адическая (где M – множество натуральных чисел, то есть m может принимать разные значения внутри одной структуры).

Такая фрактальность самого пространства хорошо согласуется с той интуицией, которую Бенуа Мандельброт в 1970-е гг. выразил словами «Фрактальная геометрия природы» [Mandelbrot, 1983]. Эта интуиция существенно противоречит интуиции, общей для почти всей науки Нового времени, для которой фрактальные структуры были маргинальными. Для этой науки были характерны сильная диспропорция в пользу «непрерывной» геометрии по отношению к дискретной и стремление выводить законы природы из наблюдения над процессами, похожими на равновесные, а не сильно неравновесными и хаотическими (последние имеют фрактальную природу, и порядок в них обнаруживается при переходе к m-адическому рассмотрению[10]).

Трудно сказать, кому принадлежит афоризм о том, что природа не делает скачков[11], но в науку Нового времени он внедрен Лейбницем. Лейбниц признавал вполне наличие скачков, но не хотел придавать им существенного значения: «Tout va par degrés dans la nature, et rien par saut, et cette regle à l'egard des changements est une partie de ma loy de la continuité. Mais la beauté de la nature qui veut des perceptions distinguées, demande des apparences de sauts, et pour ainsi dire des chutes de musique dans les phenomenes …»[12]. Фрактальный, он же «p-адический» взгляд на природу противоположен, но не совсем: он предполагает и почти непрерывность (полноту по Коши) при малых p-адических расстояниях (на уровне «Канторовой пыли»), и резкие скачки – при больших (между разными уровнями фрактальной структуры). Тут получается, что и постепенность (но не абсолютная непрерывность континуума!), и «скачки» важны одинаково.

3.3. Логика ультраметрики

Если воспринимать апории Зенона всерьез, то $\mathbb{Q}_p$ оказывается привлекательнее $\mathbb{R}$ и с точки зрения логики и топологии. $\mathbb{Q}_p$ подразумевает ультраметрику, т. к. в нем невозможно задать неравенство треугольника в той же форме, что и для $\mathbb{R}$. Для метрики

[10] Помимо классических работ по теории катастроф, особенно Рене Тома [Thom, 1983] и В. И. Арнольда [Арнольд, 1990], упомяну работу Дэвида Харта [Harte, 2001], посвященную хаотическим процессам. Используемая автором b-адическая мера является, в наших терминах, m-адической, т. е., не оговаривая этого, автор оперирует в пространстве $\mathbb{Q}_p$, а не $\mathbb{R}$.

[11] Часто этот латинский афоризм атрибутируют авторам XVII в., но я его впервые встречаю у Мейстера Экхарта (1260–1328 гг.) в трактате, написанном между 1305 и 1328 гг., *Liber Parabolarum Genesis* [*Книга притч из книги Бытия*], 16, причем, там он уже цитируется как общеизвестный: «Quarto principaliter notandum quod, quia natura non facit saltum sed processu ordinate sive ordine progressive deficit paulatim et pedetemptium quantum minus potest, idcirco primus casus et recessus ab uno est in duo et duo tantum» [Eckhart, 1965, p. 486] («В-четвертых важно отметить, что, поскольку природа не совершает скачка, но помалу и как можно более мелкими шагами отступает [от Единого] упорядоченным продвижением, или продвигающимся порядком, то первое отпадение и отход от Единого бывает в двоицу и только в двоицу»).

[12] *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1704), IV, 16; [Leibniz, 1990, S. 473] («В природе все происходит постепенно и ничто – скачкообразно, и это правило относительно изменений является частью моего закона непрерывности. Но красота природы, желающая изысканных впечатлений, требует кажущихся скачков [*букв.* кажимостей скачков] и, так сказать, музыкальных каденций в явлениях …»).

на поле действительных чисел неравенство треугольника можно задать так, как оно и задается чаще всего: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Это неравенство не налагает ограничений на форму треугольника. В ультраметрике оно не выполняется, а выполняется лишь его частный случай – так называемое усиленное неравенство треугольника: $d_p(x, z) \leq \max \{d_p(x, y), d_p(y, z)\}$. Это требование ко всем треугольникам быть равнобедренными (можно равносторонними).

Из этого следуют важные как топологические, так и логические свойства. Мы обратим внимание на четыре из них:

1. Ультраметрическое пространство является вполне несвязным. Это означает, что все его элементы отделены друг от друга (т. е. оно является «гранулированным», и поэтому парадоксы Зенона о движении в нем блокированы).
2. В ультраметрическом шаре любого радиуса каждая точка является его центром (это очевидно из усиленного неравенства треугольника).
3. Пересечение ультраметрических шаров возможно только как их объединение, т. е. превращение двух шаров в один; частичные пересечения шаров невозможны (тоже довольно очевидно из усиленного неравенства треугольника и предыдущего пункта).
4. Если говорить на языке «множеств» (не обязательно имея в виду какую-либо конкретную теорию множеств), то все множества в ультраметрическом пространстве являются открыто-замкнутыми (clopen sets), т. е. замкнутыми и открытыми одновременно.

Нахождение каждой точки шара в его центре (при том, что речь идет именно о шаре, а даже не о сфере) – соответствует не-алетической логике пространства. Крис Мортенсен в специальной работе о логиках, соответствующих различным типам топологии, также показал, что логика открыто-замкнутых множеств – одновременно паракомплектная и параконсистентная [Mortensen, 2010], т. е. не-алетическая.

Г. Прист применял не-алетическую логику к самому процессу движения, но, если принять $\mathbb{Q}_p$ вместо $\mathbb{R}$, ее нужно отнести к структуре физического пространства. Этот подход противоположен, с точки зрения физики, подходу Г. Приста, но я не думаю, чтобы он был несовместим с подходом Г. Приста относительно самой физической реальности. По-моему, здесь можно сформулировать какой-то аналог принципа неопределенности В. Гейзенберга: физической реальности присущ не-алетизм, но мы можем его вытеснить из описания движения, и тогда он уйдет в описание пространства, а можем поступить противоположным образом; оба подхода будут дополнительны в смысле принципа дополнительности Нильса Бора.

4. Что же все-таки произойдет с Ахиллесом и Гектором?

Мы не можем уклониться от того, чтобы рассмотреть потенциальную встречу или невстречу Ахиллеса и Гектора. Примем те уточнения и упрощения условий поставленной И. В. Берестовым задачи, которые внес Е. В. Борисов: Ахиллес и Гектор движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью в течение одного и того же времени. Вслед за обоими этими авторами, будем рассматривать встречу Ахиллеса и Гектора как их наложение друг на друга, согласно следующему определению в редакции Е. В. Борисова:

> Если (1) o_1 преодолел пространственный интервал i_1^s и ничего более в течение всего временнóго интервала i^t и только его, и (2) o_2 преодолел пространственный интервал i_2^s и ничего более в течение всего временнóго интервала i^t и только его, и (3) $i_1^s \cap i_2^s = \varnothing$, то в течение i^t o_1 и o_2 не наложились друг на друга в какой-либо пространственной точке.

Внесем одно усложнение, т. к. нам теперь будет неудобно рассматривать Ахиллеса и Гектора как точечные объекты, но наши выводы будут справедливы и для «точечного» случая. В интересах наглядности предположим, что Ахиллес и Гектор имеют форму шара. Поскольку шарами они являются ультраметрическими, то никакое наложение в смысле приведенного выше определения для них невозможно вообще. Они могут, если хотят, только взаимопоглотиться, образовав таким образом Ахиллогектора, или Гектороахилла. Но это еще мягко сказано, т. е. сказано с позиций неразличимости внутри такого объединения элементов Гектора и Ахиллеса. Это некоторая консистентная аппроксимация неконсистентного положения дел, при котором элементы Гектора и Ахиллеса одновременно совпадают и идентичны, и не совпадают, и не идентичны, а также являются элементами Гектора или Ахиллеса, но в то же время не являются элементами ни Гектора, ни Ахиллеса. Это соответствует ситуации границы между открыто-замкнутыми множествами [рассмотренной у: Mortensen, 2010].

Таким образом, можно сказать, что И. В. Берестов неправ в своем утверждении о том, что Гектор и Ахиллес не встретятся. Но лучше бы так не говорить. Потому что… о такой ли встрече они мечтали?

5. Интуиция Пуанкаре и освобождение физики от иррациональных чисел

Идея отказа от иррациональных чисел в последние десятилетия носится в воздухе. Выше мы говорили о предложениях физиков, которые обременены сложившимися традициями физической науки больше, чем философы и математики, и поэтому их предложения менее радикальны: они готовы иррациональные числа ограничить в правах, но не отправлять в окончательное изгнание. А вот философы, как всегда, ведут себя менее ответственно.

Майкл Дамметт [Dummett, 2000], не рассматривая p-адические числа, предложил остаться при одних рациональных. Естественно, что его концепция «нечеткого реализма» (fuzzy realism) стала напоминать квантовомеханические подходы к макромиру К. Антонопулоса и А. Д. Николенко, но с важным отличием: он полагает минимальные значения физических величин (связанных с измерением времени и пространства) столь малыми, что они должны быть заведомо недоступны для измерительных приборов, и поэтому все измеряемые величины должны выглядеть так, как будто они относятся к бесконечно делимому континууму, тогда как на самом деле они обладают дискретностью и нечеткостью на микроуровне. Между прочим, это воспроизводит главную идею «закона непрерывности» Лейбница[13], которая в конце XIX в. была переосмыслена в духе признания бесконечной делимости пространства. Сам Лейбниц, однако, считал бесконечно делимыми только математические концепции, но полагал при этом, что физическая реальность отличается от результата основанных на них расчетов настолько мало, что различие не будет доступно никакому измерению [см.: Tho, 2016].

Нельзя не заметить, что Дамметт предлагает не менее умозрительную конструкцию, чем иррациональные числа. С физической точки зрения, его объяснение полностью эквивалентно тому, что достигается с помощью иррациональных чисел. В этом оно существенно отличается от перехода к пространству p-адических чисел, структура которого идеально подходит для повсеместно встречающихся объектов и процессов, имеющих масштабируемую структуру, включая катастрофические и хаотические процессы.

Отказа от иррациональных чисел в пользу p-адических никто пока что не предлагал, но мое предложение это сделать находится в русле научной программы применения математики к физике, восходящей к интуициям Анри Пуанкаре (1854–1912 гг.) и разрабатывавшейся сначала (непоследовательно) Германом Вейлем (1885–1955 гг.) и, на рубеже 1980-х и 1990-х гг., Соломоном Феферманом (1928–2016 гг.). С. Феферман, развивая идеи Г. Вейля, предложил использовать в физике лишь такую математику, которая оперирует бесконечностями мощности не более алеф-нуль [см.: Feferman, 1998, pp. 229-298; особенно весь раздел «Countably Reducible Mathematics»]. Впрочем, даже С. Феферман не упоминал о p-адических числах.

Пуанкаре признавал за иррациональными числами физический смысл, но делал это очень неохотно, только от безвыходности: «Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c’est le nombre entier. C’est le monde extérieur qui nous a impose le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu’il nous a forcés à inventer»[14]. В существование несчетных множеств Пуанкаре так и не поверил[15]. В понятии иррационального числа Пуанкаре видел только мысленный трюк: «… M. Dedekind désigne par le nom de *nombre incommensurable* un simple symbole, c’est-à-dire quelque chose de très différent de l’idée que l’on croit se faire d’une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible»[16]. Этому вторит С. Феферман, когда он завершает свою книгу риторическим вопросом: «What are the real numbers, really?» [Feferman 1998, p. 298] – «А действительно, что это за такие действительные числа?».

[13] Одно из его особенно характерных выражений из *Essay de Dynamique* (1692): «…la loy de la continuité, en vertu de laquelle entre autres effects, tout changement doit arriver par des passages inassignables et jamais par saut» [Leibniz, 1860, p. 229] («… закон непрерывности, в силу которого, помимо прочих следствий, всякое изменение должно происходить посредством не подлежащих измерению переходов и никогда не скачком»).

[14] [Poincaré, s.a., p. 164] («Единственный естественный предмет математической мысли – это целое число. Непрерывность навязана нам внешним миром; конечно, ее изобрели мы сами, но он заставил нас ее изобрести»).

[15] В целом об этих идеях А. Пуанкаре см. особ. [Folina, 1992, pp. 120-127], особ. p. 127, где автор резюмирует подход Пуанкаре следующим образом: «…insofar as we strictly *construct* particular elements of continuum, this ‘set’ is countable; and conversely, insofar as we *know* the continuum is uncountable, we do not know it (merely) as a set».

[16] [Poincaré, 1917, p. 32] («…г-н Дедекинд обозначает именем *несоизмеримого числа* [т.е. иррационального числа] простой символ, то есть нечто совершенно отличное от той идеи, которую обычно имеют относительно количества, которое должно быть измеряемым и почти осязаемым»).

Мне представляется, что *p*-адические числа, которые определяются через натуральные, вполне бы удовлетворили критерию Пуанкаре в качестве «естественного объекта математической мысли». Но его вряд ли бы удовлетворило приписывание физическому пространству ультраметрических свойств: – по причине неизбежно следующих из них противоречий.

6. Что мешает ультраметрике?

Теперь вспомним, с какой проблемы мы начинали. Это был выбор между двумя онтологиями – либо дискретной, либо двойной. Первая ведет к противоречиям, над второй занесена бритва Оккама. Все это время я пытался показать, что противоречий бояться не надо (а бритвы Оккама, напротив того, надо). Известно, что любые противоречия можно обойти через новые придуманные сущности, т. е. через усложнение онтологии. Именно по такому принципу развивается систематизированный бред, который создает у больного картину мира, абсолютно лишенную противоречий: в его воображении за всеми событиями появляются соответствующие агенты. Если такого больного поймать на противоречии, то он это противоречие немедленно разрешит, сославшись на новых агентов или новые действия старых. Поэтому идеал абсолютно непротиворечивой картины мира нельзя назвать недостижимым, хотя и трудно назвать желанным. Это не означает, что противоречия никогда не свидетельствуют о том, что наша картина мира неполна. Как и прочие симптомы психических заболеваний, систематизированный бред представляет собой гипертрофированную, но изначально полезную человеческую способность.

А выбор между, с одной стороны, онтологией более простой, но противоречивой, или, с другой стороны, непротиворечивой, но более сложной, мы унаследовали от античной науки. В своем определении «энтелехии» (целевой причины) того, что существует потенциально, как движения[17], Аристотель оставляет большой простор для толкований, но, во всяком случае, ясно, что Аристотель блокирует бесконечную регрессию в духе Зенона введением телеологической причинности [ср., в частности: Johnson, 2005, p. 258 *et passim*], а это вряд ли гарантирует стерильность от противоречий. В другом высказывании, которое сильно повлияло на утверждение мнения о постепенности природных изменений, Аристотель и вовсе формулирует центральную идею нечеткой логики (fuzzy logic), причем интерпретирует ее в духе паракомплектности. Это то место из *О истории животных*, где Аристотель рассматривает растительный мир как необходимую промежуточную ступень между неживой природой и животными. При этом Аристотель использует термин «непрерывность» (συνέχεια) для обозначения того явления, которое и создает нечеткость, а промежуточное звено между двумя четкими полюсами описывает вполне аналогично парадоксу кучи[18]. Это нечеткое «среднее» трудно отнести к одному из полюсов, так что применить принцип исключенного третьего не получается.

---

[17] Аристотель, *Physica*, III, 1; 201a10-11: ἡ τοῦ δυνάμει ὄντος ἐντελέχεια, ᾗ τοιοῦτον, κίνησίς ἐστιν [Aristotle 1936, p. <164>] («энтелехия (целевая причина) сущего потенциально, как таковая, есть движение»).

[18] Аристотель, *De historia animalium*, VIII, 1; 588b4-6: οὕτω δ'ἐκ τῶν ἀψύχων εἰς τὰ ζῷα μεταβαίνει κατὰ μικρὸν ἡ φύσις, ὥστε τῇ συνεχείᾳ λανθάνειν τὸ μεθόριον αὐτῶν καὶ τὸ μέσον ποτέρων ἐστίν [Aristote, 1970, p. 2] («природа переходит от неодушевленного к животному настолько помалу, что скрывает непрерывностью границу между ними и то, к чему из них принадлежит среднее»).

Как известно, Лейбниц переосмыслил «энтелехию» Аристотеля в своей динамической теории движения, к которой восходит представление о силе в физике XIX в. Лейбниц просто переименовал «энтелехию» «силой», сразу же оговорив, что речь не идет о *Deus ex machina* в духе «Моисеевой философии» (1638 г.) алхимика и герметиста Роберта Флудда. Но тут же он оговорил и то, что речь не идет о чем-то материальном, логическом или геометрическом, но речь именно о метафизическом понятии – т. е. о двойной онтологии, сказали бы мы[19]. В физике XIX в. метафизический аспект «динамики» Лейбница был отброшен одинаково далеко как теми, кто (как Больцман) выводили физические законы из свойств материи, так и теми, кто (как Оствальд) выводил их из свойств энергии. Онтология снова перестала быть двойной, но неконсистентная логика осталась под запретом.

Так парадоксы Зенона вернулись в поле нерешенных проблем и стали вызовом для науки XX в. Мы по-прежнему их решаем, усложняя либо онтологию, либо логику. Усложнение онтологии – приписывание макрообъектам квантовомеханических свойств (корпускулярно-волнового дуализма). Усложнение логики (ее расширением до паракомплектной и далее не-алетической) может быть сформулировано на языке топологии как предложенный выше союз Зенона и ультраметрики.

Список литературы / References

Арнольд, В. И. (1990). *Теория катастроф.* Изд. 3-е, доп. М.

Arnold, V. I. (1990). *The Catastrophe Theory*. Moscow. (In Russ.)

Берестов, И. В. (2022). Как Ахиллес с Гектором разминулся: затруднение в теории движения, разводящей прохождение открытого интервала и его замыкания. *Respublica Literaria.* Т. 3. № 4. С. 5-27. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27

Berestov, I. V. (2022). How Achilles and Hector Missed Each Other: A Difficulty in the Theory of Motion That Distinguish the Passage of an Open Space Interval from the Passage of its Closure. *Respublica Literaria.* Vol. 3. no. 4. pp. 5-27. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27 (In Russ.)

Борисов, Е. В. (2022). Все-таки они встретились. *Respublica Literaria.* Т. 3. № 4. С. 28-32. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.28-32

Borisov, E. V. (2022). And Yet They Met. *Respublica Literaria.* Vol. 3. no. 4. pp. 28-32. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.28-32 (In Russ.)

Николенко, А. Д. (2019a). О понятии движения и неизбежности его квантования. Часть 1-2. *Физика сознания и жизни, космология и астрофизика.* Т. 19. №. 1-2. С. 46-61.

[19] *Specimen dynamicum* (1695) [Leibniz, 1860, pp. 241-242]. Ср.: [Flud, 1638]. Выпад против Флудда нужно рассматривать как элемент полемики Лейбница против Ньютона, который, вслед за Флуддом и другими алхимиками, принимал учение о совершенной пассивности материи; Лейбниц, напротив, вдохновлялся идеями Парацельса и ван Гельмонта. См.: [Iltis, 1973].

Nikolenko, A. D. (2019a). The concept of motion and the inevitability of its quantization. Part 1-2. *Physics of consciousness and life, cosmology and astrophysics.* Vol. 19. no. 1-2. pp. 46-61. (In Russ.)

Николенко, А. Д. (2019б). О понятии движения и неизбежности его квантования. Часть 3-4. *Физика сознания и жизни, космология и астрофизика.* Т. 19. № 3-4. С. 20-31.

Nikolenko, A. D. (2019b). The concept of motion and the inevitability of its quantization. Part 3-4. *Physics of consciousness and life, cosmology and astrophysics.* Vol. 19. no. 3-4. pp. 20-31. (In Russ.)

Antonopoulos, C. (2003). The Tortoise Is Faster. *The Southern Journal of Philosophy*. Vol. 41. pp. 491-510. DOI: 10.1111/j.2041-6962.2003.tb00963.x

Antonopoulos, C. (2004). Moving without Being where You're Not; A Non-Bivalent Way. *Journal for General Philosophy of Science*. Vol. 35. pp. 235-259. DOI: 10.1387/theoria.10511

Antonopoulos, C. (2007). The Quantum Logic of Zeno: Misconceptions and Restorations. *Acta Philosophica*. Vol. 2. no. 16. pp. 265-284.

Aristote. (1970). *Histoire des animaux. Livres VIII-X.* Éd. P. Louis. T. III. (Collection des Universités de France publié sous le patronage de l'Association Guillaume Budé. Série grecque, 189), Paris.

Aristotle. (1936). *Aristotle's Physics.* A Revised Text with Introduction and Commentary by W. D. Ross. Oxford.

Bohr, N. (1981). On the Constitution of Atoms and Molecules. In Hoyer, U. (ed.). *N. Bohr. Collected Works. Vol. 2. Work on Atomic Physics (1912–1917).* Amsterdam, 1981. pp. 159-233 (originally published in 1913).

da Costa, N. C. A., de Ronde, C. (2014). Non-reflexive Logical Foundations for Quantum Physics. *Foundations of Physics*. Vol. 44. pp. 1369-1380. DOI: 10.1007/s10701-014-9848-3

Dummett, M. (2000). Is Time a Continuum of Instants? *Philosophy*. Vol. 75. pp. 497-515. DOI: 10.1017/S0031819100000644

Eckhart (Meister). (1965). *Die lateinische Werke*. Bd. I/1. Stuttgart. Hrsg. Konrad Weiss.

Feferman, S. (1998). *In the Light of Logic.* New York–Oxford.

Flud, R., alias de Fluctibus. (1638). *Philosophia Moysaica.* Goudae.

Folina, J. (1992). *Poincaré and the Philosophy of Mathematics*. New York.

French, S., Krause, D. (2006). *Identity in Physics*. Oxford.

Harte, D. (2001). *Multifractals: Theory and Applications*. Boca Raton. FL.

Iltis, C. (1973). The Leibnizian-Newtonian Debates: Natural Philosophy and Social Psychology. *The British Journal for the History of Science*. Vol. 6. pp. 343-377. DOI: 10.1017/S000708740001253X

Johnson, M. R. (2005). *Aristotle on Teleology*. Oxford.

Khrennikov, A. (1997). *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*. (Mathematics and Its Applications, 427). Dordrecht.

Khrennikov, A. (2016). *Probability and Randomness: Quantum versus Classical*. London.

Krause, D., Arenhart, J. R. B. (2019). Is Identity Really So Fundamental? *Foundations of Science*. Vol. 24. pp. 51-71. DOI: 10.1007/s10699-018-9553-3

Leibniz, G. W. H. (1860). *Leibnizens mathematische Schriften*. Gerhardt, C. I. (hrsg.). Abt. II. Bd. 2. (Leibnizens gesammelte Werke. Folge III. Bd. 6). Halle.

Leibniz, G. W. H. (1990). *Sämtliche Schriften und Briefe*. Reihe VI. Bd. 6. *Nouvaux Essais*. Durchgesehener Nachdruck der Erstausgabe. Robinet, A., Schepers, H. (hrsg.). Berlin.

Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. Updated and Augmented. New York.

Mortensen, Ch. (2007). Zeno's Paradoxes. In Close, E., Tsianikas, M. and Couvalis, G. (eds.). *Greek Research in Australia: Proceedings of the Sixth Biennial International Conference of Greek Studies, Flinders University June 2005*. Adelaide. pp. 11-18.

Mortensen, Ch. (2010). *Inconsistent Geometry*. (Studies in Logics, 27). London.

Mortensen, Ch. (2020). Change and Inconsistency. In Zalta, E. N. (ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2020 Edition)*. URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/change/

Nikolenko, O. D. (2012). The nature of physical motion and Zeno's paradox. *Physics Essays*. Vol. 25. no. 3. pp. 320-326. DOI: 10.4006/0836-1398-25.3.320

Pitkänen, M. (2016). *Topological Geometrodynamycs: Revised Edition*. Sharjah.

Poincaré, H. (1917). *La science et l'hypothèse* (Bibliothèque de philosophie scientifique). Paris (originally published in 1902).

Poincaré, H. (*s.a.*). *La valeur de la science* (Œuvres philosophiques de Henri Poincaré. Édition définitive). Paris (originally published in 1905).

Priest, G. (2006). *In Contradiction: A Study of the Transconsistent.* Expanded ed. Oxford.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York.

Russell, B. (2009). The Problem of Infinity Considered Historically. In B. Russell. *Our Knowledge of the External Word: as a field for scientific method in philosophy* (Routledge Classics) Abingdon. pp. 125-147 (originally published in 1914).

Tho, T. C. (2016). What is expressed in motion? Actual and ideal infinitesimals in Leibniz's. *Specimen Dynamicum*. *Journal of Early Modern Studies*. Vol. 5. pp. 115-142.

Thom, R. (1983). *Mathematical Models of Morphogenesis.* Tr. by W. M. Brookes, D. Rand. (Ellis Horwood Series Mathematics and Its Applications). London.

Vladimirov, V. S., Volovich, I. V., Zelenov, E. I. (1993). *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*. (Series on Soviet & East European Mathematics, 1). Singapore.

Сведения об авторе / Information about the author

Лурье Вадим Миронович – доктор философских наук, ведущий научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail: hieromonk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6618-2829.

Статья поступила в редакцию: 14.11.2022
После доработки: 01.12.2022
Принята к публикации: 12.12.2022

Lourié Basil – Doctor of Philosophical Sciences, Leading Research Officer at the Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva Str., 8, e-mail: hieromonk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6618-2829.

The paper was submitted: 14.11.2022
Received after reworking: 01.12.2022
Accepted for publication: 12.12.2022