УДК 1.125

АПОРИИ ЗЕНОНА И ПОНЯТИЕ ТОЧКИ

О. А. Доманов
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
odomanov@gmail.com

Аннотация. Парадоксы Зенона о движении опираются на понятие точки как объекта, не имеющего размеров. Двусмысленность точки как «места, не занимающего места» приводит в некоторых случаях к постановке вопросов, на которые нет ответов. В статье обсуждается разрешение подобных парадоксов в рамках бесточечной геометрии или бесточечной топологии. В последних точка является не основным, а производным понятием, для которого невозможны указанные парадоксальные вопросы. Урок рассмотренных в статье И. Берестова парадоксов движения состоит в том, что бесконечность и предельные понятия, такие как точка, не всегда являются достаточно ясными для того, чтобы основывать на них нашу формализацию.

Ключевые слова: парадоксы движения, бесточечная геометрия, бесточечная топология.

Для цитирования: Доманов, О. А. (2022). Апории Зенона и понятие точки. *Respublica Literaria*. Т. 3. № 4. С. 33-39. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.33-39

ZENO'S PARADOXES AND THE NOTION OF POINT

O. A. Domanov
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
odomanov@gmail.com

Abstract. Zeno's movement paradoxes stem from the notion of point as an object that has no size. The ambiguity of point as «a place taking no place» leads in some cases to questions having no clear answers. The article discusses solutions of such paradoxes in the framework of point-free geometry or pointless topology. These approaches consider point as a derived notion which doesn't permit the paradoxical questions mentioned. The lesson we can draw from the movement paradoxes discussed in I. Berestov's article is that infinity and limit notions similar to that of point are not always clear enough to base on them our formalization.

Keywords: movement paradoxes, point-free geometry, pointless topology.

For citation: Domanov, O. A. (2022). Zeno's Paradoxes and the Notion of Point. *Respublica Literaria*. Vol. 3. no. 4. pp. 33-39. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.33-39

Убеждение в том, что парадоксы континуума, подобные парадоксам Зенона, были успешно разрешены в XIX в. после изобретения понятия предела и построения теории вещественного числа, а также топологии, широко распространено. Однако ясны ли сами понятия предела и топологического пространства? Игорь Берестов в своей статье обсуждает проблемы, в которых мы сталкиваемся с трудностями при попытках их разрешения средствами стандартной топологии, такими как понятия открытого множества, граничной точки и т. д. Однако решения, которые он предлагает, также, по существу, опираются на традиционные топологические построения. Между тем, уже давно высказываются сомнения в применимости этих построений в некоторых ситуациях. Важнейшим понятием, которое при этом ставится под вопрос, является понятие точки. Будучи идеальным предметом без размеров, точка описывается предельным понятием, и как во многих случаях, в которых участвует бесконечность, при этом описании существует опасность некорректного переноса правил обращения с конечными объектами на бесконечный объект. Поскольку граница существенным образом состоит из точек, мы сталкиваемся при этом с проблемами при формализации именно граничных эффектов. Рассмотрим подробнее, о чём идёт речь.

Рассуждения в статье опираются на различение «прохождения открытого интервала и только его» и «прохождения замкнутого интервала и только его» [Берестов, 2022]. Автор пишет: «…описанное указанным способом движение возможно, только если объект не проходит в течение $[t_1, t_2)$ тот же пространственный интервал, что он проходит в течение $[t_1, t_2]$». При этом предполагается, что в терминах точек замкнутый интервал больше, чем открытый, поскольку замыкание состоит в добавлении точек границы (точнее говоря, предельных точек, но нас сейчас интересуют точки границы). С математической точки зрения это различение вполне корректно. Ещё в XIX в. был разработан концептуальный аппарат, призванный разрешить возникающие здесь проблемы. Речь идёт о понятиях предела и непрерывности. Следует различать возможность подойти к некоторой точке как угодно близко и нахождение в этой точке. Например, предел функции в точке и её значение в этой точке не обязаны быть равными; они равны для непрерывных функций, но функция может быть и разрывна. С этой точки зрения, точки границы интервала или области не обязаны принадлежать самому этому интервалу или области. Поэтому, вообще говоря, замкнутый интервал «больше» открытого.

Нужно, однако, заметить, что вопрос о *величине* пройденного пути оказывается здесь двусмысленным. Действительно, если мы можем подойти к точке границы как угодно близко, то различаются ли длины открытого и замкнутого интервала? Как оказывается, нет, поскольку «длина» границы равна, собственно, нулю. Но тогда в каком смысле мы можем говорить, что, пройдя замкнутый интервал, мы прошли «больше», чем пройдя открытый? Имеют ли такие вопросы вообще смысл? Открытый интервал и его замыкание проходятся в точности за одно и то же время. Мы прошли «больше на одну точку», но это не увеличило ни затраченное время, ни пройденное расстояние. Мы сталкиваемся здесь с некоторой неясностью. Мы не можем сказать, что, выйдя на границу, мы прошли дополнительное расстояние, однако граница всё же выступает как определённое «место», в котором, например, функция может иметь отдельное значение, не связанное со значениями в других точках. Эта неясность, разумеется, связана с понятием точки как не имеющей размеров. Возможно, понимание такой точки как некоторого «места» является некорректным переносом свойств конечных объектов на бесконечные (предельные, имеющие нулевые размеры). В таком случае, корректен ли вопрос о предположительном состоянии демона Бенацеррафа в граничной точке интервала?

Рассмотрим пример – так называемую лампу Томсона [Thomson, 1954]. Она снабжена выключателем, который включают на одну секунду, затем выключают на 1/2 секунды, затем опять включают на 1/4 секунды, затем выключают на 1/8 секунды и т. д. Эта последовательность должна закончиться в конце второй секунды, и далее состояние лампы не будет изменяться. Вопрос состоит в том, каково будет это состояние? Будет ли лампа гореть или погаснет? С топологической точки зрения вопрос не имеет ответа, поскольку задача недоопределена. Условия задачи определяют состояние лампы в каждой точке открытого интервала, но не определяют его на границе. С формальной точки зрения это, действительно, так. Более того, мы не можем и доопределить это состояние в точке $t = 2$, поскольку функция, представляющая свет лампы, просто не имеет предела в конце второй секунды. В результате, условий задачи недостаточно для получения ответа. Это верно, однако вопрос состоит в том, почему этих условий оказалось недостаточно. Представим себе демона, способного переключать лампу с нужной скоростью. В момент времени $t = 2$ он закончит переключение, и лампа должна остаться в одном из состояний. Этот момент неизбежно настанет, а лампа не имеет других состояний, в которых она может оказаться. Этих условий *должно* быть достаточно для ответа на вопрос; как же получается, что их недостаточно? Почему требуется доопределить состояние лампы в точке? Более того, почему мы даже можем доопределять его произвольно? Если мы не можем дать ответ, то что-то, возможно, не так с нашей формализацией?

Рассмотрим ещё один пример (его обсуждает Суарес в *Disputationes* 40, Sect. V, §58 [Suárez, 1861, p. 567]). Пусть имеется два тела разного цвета, например, чёрного и белого. Будем считать, что они замкнуты, т. е. содержат свои границы. Разумно предположить, что точки границы каждого тела должны иметь тот же цвет, что и само тело. Если мы теперь присоединим тела друг к другу путём касания, то между ними также образуется граница. Согласно топологической интерпретации она состоит из точек границ присоединённых тел – тела пересекаются, и граница образует их общую часть. Но какого цвета будут точки границы? Если мы предполагаем, что никакие точки не теряют и не приобретают цвет, то мы не можем ответить на этот вопрос (аналогичную проблему обсуждает Аристотель, когда спрашивает, будет ли двигаться или покоиться тело в момент его остановки, т. е. перехода от движения к покою). В этом случае топологическая формализация также приводит к трудностям. Мы можем попробовать их обойти, рассматривая тела как открытые области. В этом случае граница не будет принадлежать ни одному из тел, и мы, вероятно, не имеем права спрашивать о её цвете, но тогда возникает вопрос о том, что представляют собой точки границы. Откуда возникают эти точки в случае простого соприкосновения тел? Как нам следует определить прикосновение, чтобы не получить, по возможности, контринтуитивных следствий?

Попробуем разобраться в причинах этих трудностей, опираясь на идею Уайтхеда о бесточечной (point-free) геометрии [Whitehead, 1919, 1920]. При этом дальнейшее изложение будет по необходимости кратким и неформальным, как диктует формат реплики.

В бесточечной геометрии исходным понятием являются не точки, а области (regions). Области частично упорядочены отношением часть–целое, причём пересечением областей могут быть лишь другие области и никогда точки. Точки (а также линии, плоскости и т. д.) определяются как пределы, как результат предположительно бесконечного уточнения. Хотя сам Уайтхед не представил формального изложения своей теории, в настоящее время мы такое представление имеем в лице бесточечной (pointless) топологии [см., например: Gerla, 1994; Johnstone, 1983]. Эта формализация не предполагает точек как объектов нулевого размера. Точка является производным понятием и определяется как вполне простой фильтр (completely prime filter) [например: Shapiro and Hellman, 2021, p. 435], т. е. множество областей F, подчиняющееся условиям:

- F непусто;
- если A – часть B и $A \in F$, то $B \in F$;
- если $A, B \in F$, то существует $C \in F$, такое, что C – часть и A, и B;
- если объединение областей A_i принадлежит F, то одна из этих A_i также принадлежит F.

Как видно, фильтр не требует для своего определения понятия точки, однако в случае обычной топологии с точками он представляет собой набор всех областей (в топологии это обычно открытые множества), содержащих интересующий нас объект, в данном случае точку. В этом смысле он, действительно, выступает как «фильтр», позволяя локализовать то, что нам требуется. Идея состоит в том, что фильтр можно определить без указания на точку, как определённым образом «направленное» семейство областей, предположительно направленное на точку, что и позволяет её определить.

Точка границы двух непересекающихся областей определяется далее как такой фильтр, в котором каждая область содержит части обеих контактирующих областей. Области, имеющие такую границу, касаются в точках этой границы (это соответствует топологическому определению точки границы как точки, в каждой окрестности которой есть точки обеих областей). Таким образом, граница определяется как граница между областями. В производном смысле можно говорить о границе отдельной области как границе между ней и её дополнением. Таким образом, точка границы – как всякая другая точка – не является «местом», в котором может находиться какое-то тело или в котором какая-то функция может иметь значение. Тела находятся, а функции имеют значения не в точках, а на областях. Поэтому рассмотренный выше вопрос о том, какой цвет имеют точки границы белой и чёрной области, оказывается бессмысленным. В каждой из областей, определяющих точку, имеются как белые, так и чёрные части, и в этом нет ничего парадоксального; вопрос же о цвете «точки самой по себе» оказывается неверно поставленным.

Сходным образом, лампа Томсона также не может обладать определённым состоянием в точке $t = 2$ не потому, что оно не определяется постановкой задачи, а потому, что вопрос о подобном состоянии бессмыслен. Не существует временнóй точки («места» во времени), в которой лампа могла бы обладать каким бы то ни было состоянием.

Повторим ещё раз, дело не в том, что нам не доступно то, что происходит в точке границы, поскольку эта точка «бесконечно отдалена». Скорее, дело в том, что сам вопрос о том, что в ней происходит, неверно поставлен. Точка не является местом (даже идеальным), которому может быть приписан цвет или состояние лампы. Вместо того, чтобы говорить о том, что это место не имеет размеров, но всё же таково, что в нём может находиться нечто (также, разумеется, не имеющее размеров, т. е. точечное), мы отказываемся считать точку каким бы то ни было местом. Граница между двумя касающимися друг друга областями сама не является областью. Она в некотором смысле состоит из точек, но её не следует мыслить как область, не имеющую размера. Точки касания представляют собой абстракции предельного уточнения. Можно сказать, что граница – это то, к чему можно как угодно близко подойти и перейти, но на чём невозможно остановиться. Именно иллюзия того, что граница является местом, на котором может что-то располагаться, приводит к парадоксам. Соответственно, различие между прохождением открытого и замкнутого интервала также исчезает. Последнее нельзя понимать как присоединение какого-то места, пусть и не имеющего размера.

В более широком контексте, проблема состоит в том, что топологические понятия не позволяют корректно описать касание. Действительно, неформально касание двух тел можно понимать, как такое их положение, при котором они не пересекаются, т. е. не имеют общих частей, но при этом, находясь внутри каждого из них, можно подойти как угодно близко к другому. В топологии это возможно для множеств только, если одно из них будет открытым (множество является открытым, если каждая его точка входит в него вместе с некоторой своей окрестностью). При этом второе также должно быть открытым в силу симметрии (если открыто только одно, то неясно, почему именно оно). Но в этом случае граница не будет принадлежать никакому из тел. Таким образом, при касании граница будет располагаться между касающимися телами, не принадлежа ни одному из них. Каким в этом случае должен быть, например, цвет точек границы? Подобные вопросы не имеют ответов.

В чём тогда состоит недоопределённость задач, подобных лампе Томсона или демону Бенацеррафа? Если точек нет, то, например, в случае лампы Томсона, мы не можем в условиях задачи указывать моменты (т. е. точки) переключения света. Переключение происходит не в точке, а в некоторой области. Нас интересуют области, не отделённые от границы, т. е. принадлежащие соответствующему фильтру. В каждой такой области есть часть, в которой лампа переключается, и часть, в которой она уже не переключается. Для корректной постановки задачи мы должны указать состояния лампы не только в первой части, но и во второй. Мы, разумеется, не можем указать все такие состояния, поскольку внутри области происходит бесконечное число переключений, но мы должны указать состояние лампы на выходе. Мы его, однако, не указываем, и в этом состоит недоопределённость задачи. Таким образом, для корректного определения мы должны задать состояние лампы на входе и выходе каждого релевантного интервала, в том числе тех, которые определяют точку границы. Но если мы так определили процесс переключения, то мы определили и состояние лампы после его окончания. Как мы можем это сделать для бесконечного процесса? Поскольку состояние лампы после процесса переключений уже не изменяется, то очевидно, что мы должны положить одно и то же состояние на выходе для *каждой* области соответствующего фильтра. Это состояние и будет состоянием лампы после переключения. Таким образом, корректная формулировка задачи не приводит к парадоксам и не позволяет задать вопрос, на который невозможен ответ.

Расширяя контекст ещё более, мы можем сказать, что сталкиваемся здесь с проблемой формализации. Если мы начинаем с последовательности точек и определяем предел как точку (предельную точку), то приходим к парадоксам и затруднениям. Изменение же способа формализации позволяет избежать последних. Проблема формализаций, начинающих с понятия точки, состоит в том, что они начинают с того, свойства чего не могут быть прояснены в достаточной степени. Само это понятие содержит в себе в свёрнутом виде довольно сложную теорию, применимость которой к тем или иным ситуациям далеко не очевидна. Ситуацию можно сравнить с понятием множества, казавшегося простым и беспроблемным, но потребовавшего – после обнаружения парадоксов – введения целого ряда аксиом, некоторые из которых до сих пор вызывают вопросы. Бесконечность и предельные понятия, такие как точка, не всегда являются достаточно ясными для того, чтобы начинать с них формализацию. Это урок, который мы можем извлечь из подобных парадоксов.

Список литературы / References

Берестов, И. В. (2022). Как Ахиллес с Гектором разминулся: затруднение в теории движения, разводящей прохождение открытого интервала и его замыкания. *Respublica Literaria*. Т. 3. № 4. С. 5-27. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27

Berestov, I. V. (2022). How Achilles and Hector Missed Each Other: A Difficulty in the Theory of Motion That Distinguish the Passage of an Open Interval and the Passage of its Closure. *Respublica Literaria*. Vol. 3. no. 4. C. 5-27. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27 (In Russ.)

Gerla, G. (1994). Pointless geometries. In Buekenhout, F. and Kantor, W. (eds.). *Handbook of Incidence Geometry*. North-Holland. pp. 1015-1031. [Online]. Available at: http://www.dipmat2.unisa.it/people/gerla/www/Down/point-free.pdf (Accessed: 21 October 2022).

Johnstone, P. T. (Jan. 1983). The Point of Pointless Topology. *Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)*. Vol. 8. no. 1. pp. 41-53. [Online]. Available at: http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=682820 (Accessed: 21 October 2022).

Shapiro, S. and Hellman, G. (eds.) (2021). *The History of Continua. Philosophical and Mathematical Perspectives*. Oxford University Press.

Suárez, F. (1861) *Disputationes metaphysicae*. In *Opera Omnia* (ed. by C. Berton), vols. 25-26, Paris: Vivès.

Thomson, J. F. (Oct. 1954). Tasks and Super-Tasks. *Analysis*. Vol. 15. no. 1. pp. 1-13. DOI: 10.1093/analys/15.1.1.

Whitehead, A. N. (1919). *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Cambridge. Cambridge University Press. 216 p.

Whitehead, A. N. (1920). *The Concept of Nature*. Cambridge. Cambridge University Press. [Online]. Available at: http://www.gutenberg.org/files/18835/18835-h/18835-h.htm (Accessed: 21 October 2022).

Сведения об авторе / Information about the author

Доманов Олег Анатольевич – кандидат философских наук, доцент, старший научный сотрудник Института философии и права СО РАН, г. Новосибирск, Николаева, 8, e-mail: odomanov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-0057-3901.

Статья поступила в редакцию: 10.11.2022
После доработки: 21.11.2022
Принята к публикации: 12.12.2022

Oleg Domanov – Candidate of Philosophical Sciences, associate Professor, Senior Researcher of the Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva Str., 8, e-mail: odomanov@gmail.com, http://orcid.org/0000-0003-0057-3901.

The paper was submitted: 10.11.2022
Received after reworking: 21.11.2022
Accepted for publication: 12.12.2022