ФИЛОСОФИЯ

Панельная дискуссия по статье И. В. Берестова

УДК 165.3:122

КАК АХИЛЛЕС С ГЕКТОРОМ РАЗМИНУЛСЯ: ЗАТРУДНЕНИЕ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ, РАЗВОДЯЩЕЙ ПРОХОЖДЕНИЕ ОТКРЫТОГО ИНТЕРВАЛА И ЕГО ЗАМЫКАНИЯ

И. В. Берестов
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
berestoviv@yandex.ru

Аннотация. В настоящей статье я конструирую новую апорию против движения. Сначала анализируется пользующаяся широким признанием «at-at теория движения», предложенная Б. Расселом, в которой положение объекта есть функция от времени. Я показываю, что попытка определить на основании этой теории широкий класс видов движения (включая равномерное движение) терпит неудачу из-за того, что движущийся объект по истечении открытых интервалов времени может находиться в любой точке пространства, а значит, может совершать «скачки». Далее я предлагаю усовершенствованный вариант «at-at теории движения», в соответствии с которым пройденный движущимся объектом пространственный интервал есть функция от интервала времени, в течение которого объект двигался. Но оказывается, что такое понимание движения приводит к *Парадоксу встречного движения:* движущиеся с двух противоположных концов интервала навстречу друг другу Ахиллес и Гектор могут успешно пройти весь этот интервал, побывав в каждой его точке, но не встретиться *ни в одной точке* этого интервала. В последней части статьи я показываю, что попытки определения движения, использующие анализ бесконечно малых, предлагают не менее парадоксальные решения, чем сами парадоксы Зенона или не защищены от возникновения *Парадокса встречного движения*.

Ключевые слова: *Парадокс встречного движения*, «at-at теория движения», Б. Рассел, П. Бенацерраф, континуум, открытые интервалы, парадоксы Зенона, парадокс *Стрела*, парадокс *Дихотомия*.

Для цитирования: Берестов, И. В. (2022). Как Ахиллес с Гектором разминулся: затруднение в теории движения, разводящей прохождение открытого интервала и его замыкания. *Respublica Literaria.* Т. 3. № 4. С. 5-26. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27

HOW ACHILLES AND HECTOR MISSED EACH OTHER: A DIFFICULTY IN THE THEORY OF MOTION THAT DISTINGUISH THE PASSAGE OF AN OPEN SPACE INTERVAL FROM THE PASSAGE OF ITS CLOSURE

I. V. Berestov
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
berestoviv@yandex.ru

Abstract. In this paper, I construct a new aporia against movement. First, I analyze the widely accepted “at-at theory of motion” that was proposed by B. Russell. I show that an attempt to define on the basis of this theory a wide class of species of motion (including uniform motion) fails due to the fact that a moving object, after the expiration of open time intervals, can be at any point in space, and therefore can make “leaps”. Next, I propose an improved version of the “at-at theory of motion”, according to which the spatial interval passed by a moving object is a function of the time interval during which the object moved. But it turns out that such an understanding of movement leads to the *Oncoming Motions Paradox*: moving from two opposite ends of the interval towards each other, Achilles and Hector can successfully go through this entire interval, having visited every point of it, but *not having met each other* at any point of this interval. In the last part of the paper, I show that attempts to define motion through infinitesimal analysis either offer no less paradoxical solutions than Zeno’s paradoxes themselves, or these attempts are not immune to the occurrence of the *Oncoming Motions Paradox*.

Keywords: the *Oncoming Motions Paradox*, “at-at theory of motion”, B. Russell, P. Benacerraf, continuum, open intervals, Zeno’s Paradoxes, the *Arrow* Paradox, the *Dichotomy* Paradox.

For citation: Berestov, I. V. (2022). How Achilles and Hector Missed Each Other: A Difficulty in the Theory of Motion That Distinguish the Passage of an Open Space Interval from the Passage of its Closure. *Respublica Literaria.* Vol. 3. no. 4. pp.5-26. DOI: 10.47850/RL.2022.3.4.5-27

1. Введение

В настоящей статье я намерен продолжить исследование парадоксов Зенона Элейского о движении и современных вариантов, формализаций и наследников этих парадоксов. А именно, я собираюсь сосредоточиться на изложении одного аргумента в пользу тезиса Зенона о невозможности движения (или, если выражаться более осторожно, тезиса о проблематичности концептуализации движения)[1]. Этот аргумент берет за отправную точку «at-at теорию движения», разработанную Б. Расселом для преодоления зеноновской апории *Стрела*[2]. Я намерен показать, что «at-at теория движения» не способна представить удовлетворительное понимание широкого класса движений, частным случаем которого является равномерное движение. Далее я намерен предложить усовершенствованный вариант «at-at теории движения», в котором не возникает такой проблемы. Далее я намерен показать, что из усовершенствованного варианта «at-at теории движения» выводится следующее: две точки, движущиеся навстречу друг другу из конечных точек интервала AB, такие, что движение первой точки описано одним способом, а движение второй точки описано другим способом, ни в один момент времени не будут находиться в одной и той же

[1] Апории Зенона против движения (*Дихотомия*, *Ахиллес и черепаха*, *Стрела*, *Стадий* [см. варианты изложения в: Берестов, 2021c, с. 18-26, 165-178] широко обсуждаются в современной философии. Обзор современных дискуссий об аргументах Зенона и родственных им аргументах; изложение и анализ исходных аргументов Зенона, а также современных аргументов в пользу проблематичности движения, континуума, существования бесконечного числа реальных объектов, выполнения бесконечной последовательности действий можно найти в монографии [Берестов, 2021c].

[2] Отмечу, что настоящая статья обязана своим существованием многочисленным беседам об апориях Зенона Элейского с Е. В. Борисовым и О. А. Домановым – коллегами из Института философии и права СО РАН (г. Новосибирск). Их критика моих попыток представить доброжелательную трактовку апории Зенона Элейского *Дихотомия* [Берестов, 2021a; Берестов, 2021b; Берестов, 2021c, с. 18-21, 31-86, 165-169] привела меня к обнаружению еще не обсуждавшегося ранее (насколько я могу судить) аргумента в пользу тезиса Зенона Элейского о невозможности движения.

точке интервала AB. Иначе говоря, точки, движущиеся по одному и тому же отрезку навстречу друг другу, никогда не встретятся друг с другом. Этот вывод я называю *Парадоксом встречного движения*, и он изложен в одноименном разделе, центральном для настоящей статьи.

Парадокс встречного движения кажется весьма контринтуитивным, что делает предложенный усовершенствованный вариант «at-at теории движения» сомнительным. Однако исходный вариант «at-at теории движения» также сомнителен, поскольку не справляется с описанием широкого класса движений.

Последний раздел настоящей статьи «Неэффективность применения исчислений бесконечно малых для решения *Парадокса встречного движения*» является факультативным дополнением к основному содержанию статьи. Этот раздел помещает *Парадокс встречного движения* в контекст некоторых современных попыток преодолеть апории против движения Зенона Элейского. В этом разделе я намерен показать, что способы описания движения (например, основывающиеся на исчислении бесконечно малых, предложенном А. Робинсоном) также весьма проблематичны, поскольку, как часто признается, они имеют следствия, кажущиеся столь же контринтуитивными, что и исходный вывод Зенона о невозможности движения, или не способны блокировать *Парадокс встречного движения*. Такая ситуация с современными концептуализациями движения может рассматриваться как довод в пользу проблематичности концептуализации движения вообще, или, по крайней мере, как довод в пользу того, что приемлемая концептуализация движения до сих пор не предложена.

2. «At-at теория движения»

Как известно, в апории *Стрела* Зенон Элейский приходит к выводу, что летящая стрела покоится в течение всего своего полета, а значит, движения не существует. Основанием для этого вывода является то, что в течение всего полета стрела занимает «равное себе место» (κατὰ τὸ ἴσον) [см. фрагмент D16a в нумерации из: Берестов, 2021c, с. 171] (присутствует в 29 A 27 DK); источник – Аристотель, *Phys.* 6.9 239b5–7:

> Если, говорит он [*scil.* Зенон], все всегда покоится, когда оно находится в равном [*scil.* ему месте] (κατὰ τὸ ἴσον), и движущееся всегда находится в ‘теперь’ [т. е. настоящем моменте времени – ἐν τῷ νῦν], тогда движущаяся стрела неподвижна.

Это можно трактовать как признание того, что в течение одного момента времени стрела, являющаяся точечным объектом, не сместится ни на одну точку. И действительно, каким бы ни было смещение стрелы в течение какого-либо интервала времени, это смещение есть смещение на некоторый невырожденный интервал[3], а не на точку, поскольку

[3] Невырожденный интервал – интервал, включающий в себя более одной точки (или момента времени). Интервалом я буду называть как собственно интервалы (a, b), так и сегмент [a, b], а также полуинтервалы (a, b] и [a, b). Бесконечные интервалы (или несобственные интервалы) в настоящей статье не рассматриваются. Также замечу, что все рассматриваемые в настоящей статье интервалы являются связными, т. е. все точки (или моменты времени), находящиеся между границами интервала, принадлежат интервалу.

движущаяся по интервалу точка не может сместиться в соседнюю точку: пространственный интервал, как предполагается, является континуумом, а точки континуума не имеют соседних (ближайших к ним) точек. Но смещение стрелы на невырожденный пространственный интервал в течение вырожденного интервала времени[4] невозможно, поскольку в этом случае точечная стрела в течение одного момента пролетела бы невырожденный пространственный интервал, т. е. точечная стрела присутствовала бы не в одной точке, а располагалась бы на континууме точек. Это кажется неприемлемым. Итак, за каждый момент полета стрела не сместится ни на вырожденный, ни на невырожденный пространственный интервал. Смещение же стрелы за все время полета есть сумма смещений ее за составляющие время полета моменты времени. Следовательно, смещение стрелы за все время полета есть сумма нулевых смещений, каковая сумма равна 0, даже если количество суммируемых нулей бесконечно. Следовательно, за все время полета летящая стрела не сместится, а значит, она покоится[5].

В основе этого рассуждения лежит посылка: если движение определено на невырожденном интервале времени, то оно определено и на составляющих этот интервал моментах времени. Значит, один из способов противостоять *Стреле* состоит в том, чтобы привести пример теории движения, в которой эта посылка не принимается. Такая теория движения была предложена Б. Расселом [Russell, 1903, pp. 347-350] и получила название «at-at теория движения». В духе этой теории движение можно определить следующим образом:

(RM) *Точечный объект движется в течение невырожденного временнóго интервала I_t тттк имеется функция f, ставящая в соответствие всем моментам времени из I_t пространственные точки, в которых этот объект находится в эти моменты времени, и f не является константной функцией на I_t.*

Как говорит Б. Рассел, движение не является состоянием тела, которое тело может иметь в определенный *момент* времени [Russell, 1903, pp. 449, 461; Arsenijević, Šćepanović, Massey, 2008, p. 40]. Движение есть двухместное отношение между стрелой и *интервалом* времени I_t. Утверждение «стрела движется в течение невырожденного временнóго интервала I_t» истинно при соблюдении условия, указанного в (RM). Заметим, что в «at-at теории

[4] Вырожденный интервал – интервал, включающий в себя одну и только более одну точку (или один и только один момент времени). Вырожденный интервал может быть обозначен как [a, a].

[5] Один из способов противостоять представленной аргументации состоит в том, чтобы заявить, что мера суммы нулевых мер равна 0 только для суммы с конечным и со счетно-бесконечным количеством слагаемых, а для несчетно-бесконечного количества слагаемых она не равна 0. В этом состоит подход А. Грюнбаума, разработанный для решения *Парадокса протяженности* [Grünbaum, 2001]. Исходный вариант изложения *Парадокса протяженности* присутствует в одном из аргументов Зенона Элейского против множественности сущего – см. 29 B 1 DK = D6 LM в нумерации из [Берестов, 2021c, с. 27-28; 159]. О современных подходах к решению апории *Стрела* см. [Берестов, 2021c, с. 86-98]. О современных подходах к решению *Парадокса протяженности* см. [Берестов, 2021c, с. 27-28; 107-116].

движения» не утверждается, что движение состоит в перемещении от одной точки дистанции к следующей. Поскольку пространственный и временно́й интервал представляют собой континуум, у точек, лежащих на этих интервалах, нет следующих точек [Russell, 2001, p. 51].

Видно, что сторонник (RM) может признавать стрелу движущейся на невырожденном интервале времени и считать, что на вырожденном интервале времени движение не определено. В такой теории движения невозможно заключить от движения стрелы на невырожденном интервале времени к ее движению в моменте времени, а значит невозможно суммировать расстояния, пройденные стрелой за моменты того интервала времени, на котором она движется. Это блокирует рассуждение в *Стреле*, и вывод о неподвижности стрелы не следует.

Тем не менее, в «at-at теории движения», признающей (RM), имеется серьезный недостаток, состоящей в том, что в этой теории некоторые виды движения определяются контринтуитивно. Чтобы выявить этот недостаток, придется рассмотреть движение объекта по пространственным интервалам, таким, что последней пройденной объектом точки не существует (т. е. интервал является открытым с соответствующего конца). Исследование движения по таким интервалам содержится в работе П. Бенацеррафа [Benacerraf, 2001], выводы из которой я буду использовать далее. Поэтому в следующем разделе я кратко опишу результаты, к которым пришел П. Бенацерраф при анализе движения по указанным интервалам.

3. Обоснование возможности для объекта пройти открытый интервал, но не пройти его замыкание у П. Бенацеррафа

Можно выделить такой вид движения по пространственному интервалу, как *строго монотонное* движение. Пусть *строго монотонное* движение имеет следующую характеристику: если объект, *строго монотонно* движется по пространственному интервалу (лежащему на прямой), то он не возвращается назад, не останавливается и не делает «скачков». Равномерное движение (при котором объект движется с постоянной скоростью) является частным случаем строго монотонного движения[6]. Равноускоренное движение, а также любое движение с неотрицательной начальной скоростью и неотрицательным ускорением также является строго монотонным движением. Я полагаю указанную характеристику *строго монотонного* движения интуитивно приемлемой, и рассматриваемые ниже в настоящей статье развернутые определения строго монотонного движения будут тестироваться на наличие указанной характеристики.

[6] Дальнейшие рассуждения будут вестись о строго монотонном движении объекта не только потому, что такое движение является более общим случаем движения, чем равномерное движение, но также и потому, что при определении равномерного движения необходимо определить скорость движения, для чего необходимо использовать математическую технику, без которой вполне можно обойтись. Например, если скорость движения объекта определена, то функция, ставящая в соответствие моменту времени точку пространства, в которой находится тело, должна быть дифференцируема.

П. Бенацерраф в статье [Benacerraf, 2001], посвященной критике обоснования Дж. Томсоном [Thomson, 2001] невозможности совершить бесконечную последовательность действий, доказывал следующий *Тезис Бенацеррафа*, который в общем виде можно сформулировать следующим образом: *Если объект, двигаясь строго монотонно из точки A по интервалу [AB), прошел в течение невырожденного и открытого в конце временнóго интервала и только его открытый в конце пути пространственный интервал [AB) и только его, то этот объект может не пройти (как в течение этого временнóго интервала, так и в течение любого временнóго интервала, начальным сегментом которого является этот временнóй интервал) замыкание в конце пути пространственного интервала [AB) и только его, т. е. не пройти [AB] и только его.*

В дальнейших рассуждениях я буду использовать положение (BT), непосредственно следующее из *Тезиса Бенацеррафа*:

(BT) *Если объект, двигаясь строго монотонно по открытому в конце пути пространственному интервалу I_s, прошел в течение невырожденного и открытого в конце временнóго интервала I_t и только его пространственный интервал I_s и только его, то этот объект может не пройти в течение I_t и только его замыкание в конце пути интервала I_s и только его.*

Для обоснования *Тезиса Бенацеррафа* П. Бенацерраф предлагает рассмотреть следующий мысленный эксперимент. Пусть некоего демона принуждают пройти от 0 м до 1 м включительно, т. е. пройти по прямой пространственный интервал [0, 1], но этот демон очень не хочет попадать в точку 1 м. Пусть этот демон, находящийся в точке 0 м, имеет высоту 1 м, а толщину он имеет всего в одну точку, т. е. демон представляет собой отрезок длиной в 1 м, расположенный вертикально к той дистанции, которую его принуждают пройти. И демон решает уменьшать свои размеры по мере продвижения к точке 1 м.

Пусть демон движется строго монотонно на пространственном интервале [0, 1) и в течение временнóго интервала [0, 1). После 1/2 с движения высота демона будет 1/2 м (демон в этот момент пройдет 1/2 м), после 3/4 с движения высота демона будет 1/4 м (демон в этот момент пройдет 3/4 м), после 7/8 с движения высота демона будет 1/8 м (демон в этот момент пройдет 3/8 м), и т. д.

Представленное описание функции, выражающей зависимость высоты демона от времени его движения по интервалу, а также функции, выражающей зависимость высоты демона от пройденного им расстояния, не определяет высоту и положение демона через 1 с движения, или при прибытии демона в точку 1 м. Этому описанию, например, не противоречит, если демон через 1 с после начала прохождения им пространственного интервала [0, 1] вернет себе прежнюю высоту в 1 м, окажется любой другой высоты, будет точечным объектом, не имеющим высоты. Причем иметь каждый из указанных вариантов высоты демон может, находясь через 1 с после начала прохождения пространственного интервала [0, 1] не только в пространственной точке 1 м, но и в начале движения, т. е. в пространственной точке 0 м, и вообще находясь в любой точке, отличной от точки 1 м, скачком переместившись в нее после последовательного преодоления интервала [0, 1). Также приведенному описанию движения демона по пространственному интервалу [0, 1) не противоречит даже несуществование демона через 1 с после начала прохождения им пространственного интервала [0, 1] [Benacerraf, 2001, pp. 118-120; Peijnenburg, Atkinson, 2008, note 1, p. 198]. Из последнего сразу же следуют *Тезис Бенацеррафа* и (BT).

Замечу, что демон, преодолевший пространственный интервал [0, 1) и не более в течение временно́го интервала [0, 1) и не более не находится ни в одной пространственной точке и не находится ни одном моменте времени. Рассуждения П. Бенацеррафа показывают, что, если на вопрос «Где находится демон, прошедший весь интервал [0, 1)?» ответить «Нигде», то этот ответ будет вполне приемлемым для него [Benacerraf, 2001, p. 116]. Можно сказать, что демон в указанных обстоятельствах оказывается существующим вне пространства и времени, тогда как тот же демон, преодолевший пространственный интервал, замкнутый в конце пути, будет пребывать и в пространстве, и во времени. В этом выводе, по-видимому, нет ничего противоречащего «at-at теории движения» и описывающим эту теорию положениям математики, но он может показаться странным и даже неприемлемым из-за весьма распространенного мнения, что пространственно-временные объекты не могут существовать вне пространства-времени, а объекты, существующие вне пространства-времени, не могут существовать в пространстве-времени.

Также можно заметить, что положение (BT) является ослаблением следующего тезиса, который можно назвать сильной версией положения (BT):

(SBT) *Если какой-либо объект, двигаясь строго монотонно по открытому в конце пути пространственному интервалу I_s, прошел в течение невырожденного и открытого в конце временно́го интервала I_t интервал I_s, то неверно, что этот объект прошел в течение I_t замыкание в конце пути интервала I_s.*

Если (SBT) ложно, то существуют объекты, прошедшие открытый пространственный интервал и его замыкание в течение *одного и того же* невырожденного и открытого в конце временно́го интервала. Обозначим такой объект через *a*. Пусть, для определенности, *a* в течение временно́го интервала [0, 1) прошел и пространственный интервал [0, 1) и только его, и пространственный интервал [0, 1] и только его. Но что́ это могло бы означать? В этой ситуации оказываются истинными два противоречащих друг другу положения: (1) объект *a* прошел и пространственный интервал [0, 1) и только его, и (2) неверно, что объект *a* прошел и пространственный интервал [0, 1) и только его. На основании этого рассуждения я полагаю (SBT) приемлемым положением[7].

[7] Положение (SBT) может не признаваться, если различие между открытым интервалом и его замыканием утрачивает смысл, что может иметь место при моделировании движения с помощью нестандартного анализа [Harrison, 1996, p. 282]; обсуждение нестандартного анализа см. в настоящей статье ниже.

Положение (SBT) влечет, что *любой* объект, движущийся строго монотонно по невырожденному пространственному интервалу, будет находиться вне времени и пространства, если им пройден какой-либо открытый в конце пути пространственный интервал, и только он и будет находиться во времени и в пространстве, если им пройден какой-либо замкнутый в конце пути пространственный интервал и только он.

4. Недостатки «at-at теории движения»

Продолжу обсуждение «at-at теории движения», в которой признается (RM). Замечу, что функция f в (RM) является произвольной, так что движущийся, в соответствии с (RM), точечный объект может возвращаться в течение временнóго интервала I в пространственные точки, в которых он уже был, а также может совершать «скачки», т. е. может перемещаться так, что точки пространственного интервала $f(t_1)$ и $f(t_2)$, в которых находится точечный объект в моменты времени t_1 и t_2, не могут быть соединены такой линией, все точки которой посещены точечным объектом в течение временнóго интервала (t_1, t_2). В (RM) вообще не подразумевается, что точечный объект в течение временнóго интервала I движется *по* какому-либо пространственному *интервалу*, т. е. не подразумевается, что точечный объект за время своего движения покрывает континуум пространственных точек. Этим достигается то, что в (RM) предлагается наиболее общее определение движения (понимаемого как пространственное перемещение), под которое подпадает и движение «скачками», и непрерывное движение, т. е. движение без «скачков».

Пусть точечный объект движется по пространственному интервалу [AB]. Чтобы утверждать ложность тезиса Зенона о невозможности движения для случая строго монотонного движения, сторонник «at-at теории движения» должен определить не произвольное движение, определенное в (RM), а именно строго монотонное движение, которое, будучи движением, должно удовлетворять также и (RM). Таким определением строго монотонного движения может быть следующее:

(RM_m) *Движение точечного объекта строго монотонно в течение невырожденного временнóго интервала* I_t, $\inf I_t = t_L$, $\sup I_t = t_R$, *тттк (a) имеется взаимно-однозначная функция* f, *ставящая в соответствие каждому моменту времени* t *из* I_t *точку* $f(t)$ *из пространственного интервала* I_s[8], *в которой тело находится в этот момент времени; (b) для любых моментов времени* t_1 *и* t_2, *лежащих на интервале* I_t, *если* $t_2>t_1$, *то либо* $f(t_2)>f(t_1)$ *(тогда* f *строго возрастает на* I_t $\inf I_t = f(t_L)$, $\sup I_t = f(t_R)$*), либо* $f(t_2)<f(t_1)$ *(тогда* f *строго убывает на* I_t *и* $\inf I_t = f(t_R)$, $\sup I_t = f(t_L)$*).*

[8] Предполагается, что движение происходит по прямой. Таким образом, пространственный интервал I_s лежит на прямой, проходящей слева направо, каждая из точек $f(t_1)$ и $f(t_2)$ может либо лежать на I_s (в этом случае интервал I_s замкнут с соответствующей стороны), либо находиться за пределами I_s (в этом случае интервал I_s открыт с соответствующей стороны).

Положение (RM_m) кажется весьма разумным и призвано гарантировать, что движущийся точечный объект в процессе движения не делает «скачков». Но можно показать, что движущийся точечный объект все-таки может в процессе движения совершать «скачки», даже если его движение удовлетворяет условию (RM_m).

Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим следующее описание движения точечного объекта. Точечный объект в течение невырожденного временнóго интервала I_t движется из точки A в точку B по невырожденному пространственному интервалу [AB], имеется функция *f*, ставящая в соответствие всем моментам времени из I_t пространственные точки, в которых точечный объект находится в эти моменты времени, и *f* не является константной функцией на I_t, и $f(t_1)$=A, $f(t_2)$=B. При этом по истечении временнóго интервала $[t_1, t_2)$ и только его точечный объект находится в точке A, а по истечении временнóго интервала $[t_1, t_2]$ и только его точечный объект находится в точке B. Здесь следует заметить, что описанное указанным способом движение возможно, только если объект не проходит в течение $[t_1, t_2)$ тот же пространственный интервал, что он проходит в течение $[t_1, t_2]$. Действительно, в течение $[t_1, t_2]$ объект достигает точки B, а находящийся в точке B объект не может находиться в точке A. Но это означает, что описанное указанным способом движение возможно, только если выполнено (SBT).

Также следует заметить, что не существует момента времени, в который полностью истек временнóй интервал $[t_1, t_2)$ и только он. В соответствии с представленным описанием движения точечного объекта, из этого следует, что по истечении временнóго интервала $[t_1, t_2)$ и только его точечный объект является вневременным объектом, но не внепространственным: точечный объект по истечении временнóго интервала $[t_1, t_2)$ и только его находится в пространственной точке A. При этом (RM_m) соблюдено, ведь в (RM_m) накладываются условия *только* на те состояния точечного объекта, когда он находится во времени. В соответствии с предложенным описанием движения точечного объекта он совершает весьма специфический «скачок», тогда как по (RM_m) его движение следует признать строго монотонным. Этот пример показывает, что (RM_m) не гарантирует, что движущийся строго монотонно точечный объект не делает «скачков». Как мне представляется, адекватное определение строго монотонного движения все-таки должно гарантировать, что движущийся объект не делает скачков. Следовательно, для получения адекватного определения строго монотонного движения нужно скорректировать (RM_m).

5. Исправленное определение строго монотонного движения

Указанный недостаток (RM_m) будет устранен, если строго монотонное движение определять не как функцию от *моментов* к точкам, а как функцию от временных *интервалов* (начинающихся с t_L или сразу же после t_L) к пространственным *интервалам* (начинающихся с $f(t_L)$, включая или нет $f(t_L)$, если f строго возрастает на S^t; заканчивающихся в $f(t_L)$, включая или нет $f(t_L)$, если f строго убывает на S^t); пространственные интервалы здесь суть интервалы, пройденные движущимся точечным объектом, а временные интервалы суть интервалы времени, в течение которых объект прошел пространственные интервалы. Определить строго монотонное движение в этом духе можно следующим образом:

(RM_{mi}) *Движение точечного объекта строго монотонно в течение невырожденного временнóго связного интервала I_t, $inf\ I_t = t_L$, $sup\ I_t = t_R$, тттк*

(a) *имеется множество S^t таких связных подынтервалов интервала I_t, что для любого момента времени t, $t_L \leq t \leq t_R$*

- *если интервал I_t замкнут слева и справа, то в S^t присутствуют замкнутые слева интервалы $[t_L, t]$ и $[t_L, t)$;*
- *если интервал I_t замкнут слева и открыт справа, то в S^t присутствует замкнутый слева интервал $[t_L, t)$;*
- *если интервал I_t открыт слева и замкнут справа, то в S^t присутствуют открытые слева интервалы $(t_L, t]$ и (t_L, t);*
- *если интервал I_t открыт слева и справа, то в S^t присутствует открытый слева интервал (t_L, t);*

(b) *имеется невырожденный пространственный связный интервал I_s, $inf\ I_s = s_L$, $sup\ I_s = s_R$, такой, что движение тела в течение невырожденного связного временнóго интервала I_t осуществляется по связному пространственному интервалу I_s;*

(c) *имеются множество S^s пространственных связных подынтервалов пространственного связного интервала I_s и взаимно-однозначная функция f, такие, что функция f ставит в соответствие каждому временнóму связному интервалу i_t, $i_t \in S^t$, затраченному рассматриваемым точечным объектом на прохождение пространственного связного интервала i_s, $i_s \in S^s$, этот пространственный связный интервал i_s.*

Из представленного в (RM_{mi}) определения S^t следует: $I_t \in S^t$.

По построению S^t есть множество всех вложенных друг в друга временных интервалов[9] вплоть до I_t включительно, имеющих, так сказать, одно и то же начало: либо все они имеют общий момент времени, если I_t замкнуто со стороны t_L, либо все они не имеют ни одного общего момента времени, но имеют общий супремум или инфимум, не принадлежащий ни одному из них, если I_t замкнуто со стороны t_L.

[9] Здесь и далее речь идет только о связных пространственных и временных интервалах, так что в большинстве случаев ниже я буду опускать характеристику «связный».

Также по построению S^t есть полностью упорядоченное отношением строгого включения "$\subset$" (которое является бинарным отношением строгого полного порядка, т. е. транзитивным, антирефлексивным, антисимметричным отношением) множество, обладающее следующими свойствами: для любых моментов t_1 и t_2 из I_t, если $t_2>t_1$, то $[t_L, t_1]\subset[t_L, t_2]$, $(t_L, t_1]\subset(t_L, t_2]$, $(t_L, t_1)\subset(t_L, t_2)$, $[t_L, t_1)\subset[t_L, t_2)$; для любого момента t из I_t, $[t_L, t)\subset[t_L, t_2]$, $(t_L, t)\subset(t_L, t_2]$.

Из представленного в (RM_{mi}) определения S^s следует: $I_s\in S^s$.

По построению, S^s есть множество всех вложенных друг в друга пространственных интервалов вплоть до I_s включительно, имеющих, так сказать, одно и то же начало: либо все они имеют общую пространственную точку, если I_t замкнуто со стороны t_L, либо все они не имеют ни одной общей пространственной точки, но имеют общий супремум или инфимум, не принадлежащий ни одному из них, если I_t замкнуто со стороны t_L. Также по построению S^s есть полностью упорядоченное отношением строгого включения "$\subset$" множество, обладающее следующими свойствами: если i_s, такое, что $i_s\in S^s$, открыто / замкнуто со стороны своего инфимума и/или супремума, то i_s, такое, что $i_s\in S^s$ и $i_s=f(i_t)$, также открыто / замкнуто со стороны $\inf f(i_t)$ и/или $\sup f(i_t)$. Это означает, что определенное в (RM_{mi}) строго монотонное движение реализуется только если выполнено (SBT).

Замечу, что в соответствии с (RM_{mi}) движущийся по интервалу [AB] из точки A в точку B точечный объект по мере продвижения к точке B поочередно находится в состояниях двух различных типов: (1) на его перемещение затрачен открытый справа временнóй интервал; и (2) на его перемещение затрачен замкнутый справа временнóй интервал (эти состояния можно охарактеризовать также и через соответствующие временным интервалам пространственные интервалы). В случае (1) точечный объект не находится ни во времени, ни в пространстве. В случае (2) точечный объект присутствует во времени и пространстве, т. е. точечный объект занимает определенную точку на [AB] в определенный момент времени.

Можно сказать, что имеется частичная функция g, областью определения которой является S^t, ставящая в соответствие каждому *замкнутому справа* (а не любому!) временнóму интервалу i_t из S^t упорядоченную пару из момента времени, являющегося самой правой точкой интервала i_t и пространственную точку на [AB], в которой точечный объект находится в этот момент времени. Частичная функция g имеет довольно любопытные свойства. На тех интервалах из S^t, которые *открыты справа*, частичная функция g не определена. То подмножество множества S^t, которое содержит все открытые справа интервалы из S^t и только их, находится во взаимно-однозначном соответствии с тем подмножеством множества S^t, которое содержит все замкнутые справа интервалы из S^t и только их. Последнее подмножество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством вещественных чисел; с множеством моментов времени, затраченных точечным объектом на преодоление [AB]; с множеством точек на [AB].

Таким образом, преодолевший [AB] точечный объект находился вне времени и пространства столь же часто, как он находился во времени и в пространстве: $\aleph_1$ раз[10]. В этом смысле можно сказать, что пространственно-временное существование *движущегося* строго монотонно точечного объекта было «мерцающим» в течение его движения: имеются такие состояния точечного объекта, что находящийся в этих состояниях указанный объект пребывает вне времени и пространства, хотя этот объект в течение своего движения посетил все точки временнóго интервала, в течение которого он двигался, и все точки пространственного интервала, по которому он двигался.

Если же по аналогии с (RM_{mi}) дать определение для точечного объекта, покоящегося в течение интервала времени I_t, то f должна быть константной функцией на S^t. В этом случае покоящийся точечный объект имеет «мерцающее» существование во времени, но стабильно существует в одной и той же точке пространства вне зависимости от того, какой интервал времени (открытый справа или закрытый справа) истек. Понятно, что в другой системе отсчета точечный объект может двигаться, и в этом случае его пространственное существование будет «мерцающим».

6. *Парадокс встречного движения*

Предлагаю рассмотреть следующую историю. В момент времени t_L точечный объект Ахиллес (иначе известный как Ахилл) находится в точке A невырожденного отрезка [AB], а точечный объект Гектор находится в точке B отрезка [AB], точка B находится правее точки A, или координата точки B больше, чем координата точки A[11]. С момента времени t_L включительно Ахиллес и Гектор строго монотонно движутся навстречу друг другу – до точек B и A включительно, соответственно. Пусть точка C находится между точками A и B, например, посередине между ними. По (RM_{mi}), существует функция f_A, описывающая движение Ахиллеса, и существует функция f_H, описывающая движение Гектора; также существуют функции g_A и g_H, соответствующие приведенному выше описанию функции g.

Пусть

(a) Ахиллес прошел пространственный отрезок [AC] в течение временнóго интервала $[AC]_t^A$;

(b) Гектор прошел пространственный отрезок [BC) в течение временнóго интервала $[BC)_t^H$;

[10] Если истинна *Континуум-Гипотеза*. Замечу, что аргументация в настоящей статье никак не зависит от того, истинна *Континуум-Гипотеза* или нет.

[11] Здесь удобнее говорить об отрезках, а не о пространственных интервалах, поскольку, например, отрезкам [AB] и [BA] соответствует один и тот же интервал, но интервалом из них является только [AB]: [BA] нельзя считать интервалом из-за того, что сначала должна быть указана левая граница интервала. Если объект прошел отрезок [AB], то подразумевается, что он двигался от A к B; если объект прошел отрезок [BA], то это означает, что он двигался от B к A.

(c) Ахиллес прошел пространственный отрезок (CB] в течение временнóго интервала $(CB]_t^A$;

(d) Гектор прошел пространственный отрезок [CA] в течение временнóго интервала $[CA]_t^H$.

Замечу, что (RM_{mi}) и свойства определенной выше частичной функции g допускают, чтобы строго монотонное движение Ахиллеса и Гектора имело характеристики (a), (b), (c) и (d). Кроме того, описанное движение реализуется только если выполнено (SBT).

Предлагаю принять следующую, кажущуюся вполне разумной, характеристику наложения друг на друга в какой-либо пространственной точке движущихся точечных объектов o_1 и o_2:

(Spp) Если (1) o_1 преодолел пространственный интервал i_1^s и ничего более в течение всего временнóго интервала i_1^t и только его, и (2) o_2 преодолел пространственный интервал i_2^s и ничего более в течение всего временнóго интервала i_2^t и только его, и (3) $i_1^s \cap i_2^s = \varnothing$, то o_1 и o_2 не наложились друг на друга в какой-либо пространственной точке ни в течение i_1^t, ни в течение i_2^t.

Рассмотрим два положения дел – SA_1 и SA_2.

SA_1 состоит в том, что Ахиллес преодолел [AC] и ничего более, и Гектор преодолел [BC) и ничего более, причем $[AC] \cap [BC) = \varnothing$. По (Spp), Ахиллес и Гектор не наложились друг на друга ни в течение $[AC]_t^A$, ни в течение $[BC)_t^H$. Замечу, что Ахиллес, преодолевший [AC] и ничего более, находится в момент времени $\pi_1(g_A([AC]_t^A)) = C_t$ в пространственной точке $\pi_2(g_A([AC]_t^A)) = C$, а Гектор, преодолевший [BC) и ничего более, не находится ни во времени, ни в пространстве.

SA_2 состоит в том, что Ахиллес преодолел (CB] и ничего более, и Гектор преодолел [CA] и ничего более, причем $(CB] \cap [CA] = \varnothing$. По (Spp), Ахиллес и Гектор не наложились друг на друга ни в течение $(CB]_t^A$, ни в течение $[CA]_t^H$.

Получается, что Ахиллес и Гектор не наложились друг на друга в течение всего времени преодоления Ахиллесом [AB] (т. е. последовательного преодоления им [AC] и (CB]) и всего времени преодоления Гектором [BA] (т. е. последовательного преодоления им [BC) и [CA]). Иначе говоря, Ахиллес и Гектор, строго монотонно двигаясь навстречу друг другу с разных концов [AB] и посещая при движении все точки [AB], ухитрились не встретиться друг с другом, хотя благополучно добрались до противоположных концов [AB]! Этот результат выглядит странным и весьма контринтуитивным.

Эта контринтуитивность является веским основанием для заключения, что понимание строго монотонного движения через (RM_{mi}) неприемлемо. Однако выше была показана неприемлемость также и понимания строго монотонного движения через (RM_m), основывающегося на пользующейся широким признанием «at-at теории движения», признающей (RM_m). Если бы теории строго монотонного движения, основывающиеся, соответственно, на (RM_m) и (RM_{mi}), были единственными достойными рассмотрения теориями движения, то из приведенных выше рассуждений следовало бы, что *концептуализация движения до сих пор остается проблематичной* – что можно считать тезисом, который отстаивал еще Зенон Элейский. Однако, помимо рассмотренных, имеются и другие теории, и значительная их часть основывается на современном исчислении бесконечно малых, предложенном А. Робинсоном [Robinson, 1966] – на нестандартном анализе. Ниже я покажу, что многие наиболее известные теории движения, основывающиеся на нестандартном анализе, не помогают разрешить выявленный *Парадокс встречного движения*.

7. Неэффективность применения исчислений бесконечно малых для решения *Парадокса встречного движения*

Для современных исчислений бесконечно малых, основывающихся на нестандартном анализе А. Робинсона [Robinson, 1966; Nelson, 1977; Hurd, Loeb, 1985; Robert, 1988; Goldblatt, 1998], характерно дополнение числовой оси вещественных чисел «нестандартными» бесконечно малыми числами. Каждое вещественное число оказывается окруженным числами, отличающимися от него на бесконечно малую величину. В результате этого дополнения получается ось гипервещественных чисел. Гипервещественные числа являются расширением вещественных чисел.

Имеются подходы к исчислению бесконечно малых, не использующие гипервещественных чисел. Например, П. Джордано предложил расширение вещественных чисел, отличное от множества гипервещественных чисел. Таким расширением у П. Джордано [Giordano, 2010] является «кольцо Джордано», в котором содержатся бесконечно малые числа, именуемые нильпотентами. Примером нильпотента является присутствующее в окрестности каждого вещественного числа любое число ε, удовлетворяющее условию: $\varepsilon^2 = 0$.

Можно выделить по меньшей мере два различных способа, которыми может описываться движение точечного объекта в различных вариантах исчислений бесконечно малых.

В соответствии с **первым способом**, основывающимся на нестандартном анализе, определения движения объекта в (RM) и в (RM_m) должны быть изменены так, чтобы функция f (описывающая положение движущегося объекта в зависимости от времени) в (RM) и в (RM_m) стала функцией не от вещественных чисел к вещественным числам, а функцией от гипервещественных чисел к гипервещественным числам. При этом точечный объект, движущийся по интервалу [0, 1], проходит все точки, положение которых описывается вещественными числами этого интервала, а также все точки этого интервала, положение которых описывается числами, положение которых отличается от положения вещественных чисел этого интервала на какую-либо бесконечно малую величину. Такой подход к движению реализован в статье [Harrison, 1996]. Техника К. Харрисона основывается на нестандартном анализе, как он был изначально представлен в книге [Robinson, 1966] и получил развитие в [Hurd, Loeb, 1985]. Также рассматриваемый первый способ концептуализации движения был реализован в [McLaughlin, Miller, 1992] с использованием «внутренней теории множеств» –“Internal Set Theory” (IST), – подхода к нестандартному анализу, который был разработан в [Nelson, 1977]; см. таже вариант нестандартного анализа в [Robert, 1988].

В соответствии со **вторым способом**, основывающимся на анализе нильпотентов (таких, например, как кольцо Джордано из [Giordano, 2010]), определения движения объекта в (RM) и в (RM_m) должны быть изменены так, чтобы функция *f* в (RM) и в (RM_m) стала функцией не от вещественных чисел к вещественным числам, а функцией от бесконечно малых временных интервалов, окружающих каждое вещественное число, к бесконечно малым пространственным интервалам, окружающим каждое вещественное число. Как и в предыдущем случае, объект, движущийся по интервалу [0, 1], проходит все точки, положение которых описывается вещественными числами этого интервала, а также все точки этого интервала, положение которых описывается числами, положение которых отличается от положения вещественных чисел этого интервала на какую-либо бесконечно малую величину. В отличие от предыдущего случая, движущийся объект не может быть назван «точечным», поскольку он существует на бесконечно малом интервале времени, а его пространственным положением является не точка, а бесконечно малый пространственный интервал. Этот подход реализован в [Reeder, 2015].

***

Предлагаю рассмотреть следующий **вопрос**: признают ли два представленные понимания движения, основывающиеся на нестандартном анализе, (SBT)? Замечу, что для признания (SBT) нужно, чтобы положения дел, состоящие в прохождении объектом открытого интервала и в прохождении объектом замкнутого интервала, отличались друг от друга. Также открытый и замкнутый интервалы должны быть определены и должны быть различными.

На мой взгляд, приведенная выше аргументация в пользу (SBT) является достаточно убедительной. И если так, то теории движения, даже основывающиеся на нестандартном анализе, должны быть совместимыми с положительным ответом на поставленный вопрос.

Но если так, то *Парадокс встречного движения*, как кажется, можно сформулировать также и для **первой концептуализации движения** с помощью исчисления бесконечно малых, основывающегося на нестандартном анализе, для движения объекта по гипервещественным интервалам. В этом случае в *Парадоксе встречного движения* будет доказываться, что Ахиллес и Гектор могут не встретиться в одной и той же *вещественной* точке (и этот вывод является достаточно контринтуитивным, чтобы усомниться в том, что используемая теория движения предлагает приемлемую концептуализацию движения); о том, встретятся ли «проскочившие» один мимо другого Ахиллес и Гектор в какой-либо *гипервещественной* точке, отстоящей от вещественной на бесконечно малый интервал, речи в этом рассуждении не идет.

Как кажется, со стандартной точки зрения – т. е. с точки зрения, с которой «видны» вещественные числа, но не «видны» бесконечно малые числа, – так и происходит. С «внутренней» же точки зрения нестандартного анализа, т. е. с точки зрения, с которой «видны» только гипервещественные числа, без различения вещественных и бесконечно малых чисел, как кажется, дается отрицательный ответ на поставленный вопрос, поскольку различие между открытыми и замкнутыми гипервещественными интервалами в этом случае исчезает [Harrison, 1996, p. 282] из-за того, что различие между открытыми и замкнутыми интервалами имеется только для интервалов с бесконечным количеством точек, тогда как, скажем, гипервещественный интервал [0,1) содержит *конечное* множество гипервещественных чисел [Harrison, 1996, p. 281; Bernstein, Wattenberg, 1969; Alper, Bridger, 1997, p. 151]. Подробности доказательства столь удивительного тезиса в нестандартном анализе сейчас не важны.

Устранение различия между отрытыми и закрытыми интервалами сразу же делает рассматриваемую первую концептуализацию движения противоречащей (SBT). А именно, при рассматриваемом подходе невозможно преодолеть открытый в конце интервал, не преодолев тем самым его замыкание. Как я уже отметил, такой вывод неприемлем для меня в силу того, что я признаю (SBT) хорошо обоснованным положением.

И здесь любопытно заметить, что даже ценой отбрасывания (SBT) рассматриваемый способ концептуализации движения не помогает разрешить *Парадокс встречного движения*. Действительно, при этом подходе для двух движущихся навстречу друг другу точечных объектов

> «… имеется возможность того, что одна частица может находиться справа от другой в один момент, и слева от нее в следующий момент[12]. Дистанция справа или слева будет, однако, бесконечно малой, и, таким образом, нулевой со стандартной точки зрения» [Harrison, 1996, p. 283].

Это означает, что для К. Харрисона нет ничего тревожащего в том, что Ахиллес и Гектор могут «проскочить» один мимо другого (с моей же точки зрения возможность такого «проскока» указывает на сомнительность используемой концептуализации движения). Таким образом, для К. Харрисона в [Harrison, 1996] вывод из *Парадокса встречного движения* не является проблематичным, так что К. Харрисон даже не пытается избежать этого вывода.

---

[12] При рассматриваемом подходе допустимо говорить, что у момента времени имеется «следующий», ближайший к нему, момент времени, поскольку количество вещественных чисел на интервале [0,1] с «внутренней» точки зрения нестандартного анализа конечно (в специфическом смысле «конечности», которая является нестандартным вариантом стандартной конечности), хотя и бесконечно со стандартной точки зрения. Такое непривычное использование термина «конечность» может привести к путанице. Понять результаты нестандартного анализа было бы легче, если вместо термина «конечность» использовать термин «гиперконечность», т. е. «конечность с той точки зрения, с которой видны гиперреальные числа». См. обсуждение этой «конечности» из внутренней теории множеств [Nelson, 1977], используемой в [McLaughlin, Miller, 1992] для преодоления апорий Зенона Элейского против движения, в [Alper, Bridger, 1997, p. 152; Davis, 1983, p. 1204]. Контринтуитивность «конечности» является основанием для признания неприемлемым в [Alper, Bridger, 1997, p. 154] решений апорий Зенона из [McLaughlin, Miller, 1992].

К первой концептуализации движения относится также и подход из [McLaughlin, Miller, 1992], основывающийся на подходе к нестандартному анализу из [Nelson, 1977]. Авторы этой статьи не делают выводов о ложности (SBT). Это означает, что *Парадокс встречного движения* может быть сформулирован и в этом случае. Если же теория движения из [McLaughlin, Miller, 1992] расширяется так, что (SBT) становится в ней ложным, то такое расширение сомнительно в силу хорошей обоснованности (SBT). И следует обратить внимание, что теория из [McLaughlin, Miller, 1992] нуждается в дальнейшей разработке, по мнению самих авторов этой статьи, которые пишут о своей теории:

> «Теория объясняет факт движения, но не описывает природу “движения в настоящем”[13]. Если существует понятие “движения в настоящем”, то оно должно относиться к процессу, происходящему в течение бесконечно малых открытых интервалов времени u_i. На самом деле невозможно установить, какой процесс “движения в настоящем моменте времени” действует в пределах бесконечно малых интервалов u_i. Объект может мгновенно перескакивать с одного конца интервала на другой, или он может двигаться неравномерно в пределах интервала, или он может двигаться равномерно внутри интервала. (В последнем случае процесс может быть математически представлен с использованием производной из нестандартного исчисления, причем эта производная определяется поведением функции, выражающей зависимость расстояния от времени на бесконечно малом интервале в окрестностях момента времени.) Вообще, объект может не находиться в течение этих временных интервалов в какой-либо разновидности пространства-времени» [McLaughlin, Miller, 1992, p. 382].

В целом, по поводу теории движения из [McLaughlin, Miller, 1992], основывающейся на внутренней теории множеств из [Nelson, 1977], можно сказать, что они не только не предлагают достаточного обоснованного способа преодолеть *Парадокс встречного движения*, но и имеют проблемы в преодолении тех апорий против движения Зенона Элейского, для преодоления которых они были разработаны. Можно сказать, что следующий вывод из анализа теорий, применяющих внутреннюю теорию множеств к апориям Зенона, до сих пор сохраняет актуальность:

> «В сущности, мы полагаем, что решение, основанное на внутренней теории множеств, еще более парадоксально, чем сами парадоксы Зенона» [Alper, Bridger, 1997, pp. 143-144].

[13] Это выражение восходит к выражению “ἐν τῷ νῦν” из изложения апории *Стрела* Зенона Элейского во фрагменте D16a, в соответствии с нумерацией из [Берестов, 2021c, с. 171]. См. изложение *Стрелы* выше.

И далее:

«Хотя внутренняя теория множеств полезна как формальный инструмент для доказательства математических теорем, ее терминология и многие из выводимых из нее результатов не согласуются с нашими интуитивными представлениями о конечности и нашим восприятием реального мира» [Alper, Bridger, 1997, p. 163].

***

Признав неудовлетворительным подход из [McLaughlin, Miller, 1992], основывающийся на внутренней теории множеств из [Nelson, 1977], авторы статьи [Alper, Bridger, 1997] предлагают свой способ решения апорий Зенона против движения. Для этого предлагается «интервальная арифметика», в соответствии с которой вещественное число есть семейство замкнутых интервалов, ограниченных рациональными числами, таких, что пересечение любых двух интервалов не пусто, и для любого рационального числа ε>0, имеется интервал длины меньшей, чем ε [Alper, Bridger, 1997, pp. 156-157]. В соответствии с этим подходом, объект, движущийся по интервалу [0, 1] из 0 к 1, и проходящий сначала половину интервала [0, 1], затем первую половину оставшегося интервала и т. д., прошедший *все* такие интервалы, оказывается в 1 и может находиться только там [Alper, Bridger, 1997, p. 160]. Это означает, что объект не может считаться прошедшим пространственный интервал [0, 1) в течение некоторого временнóго интервала, но не прошедшим замыкание интервала [0, 1) – т. е. интервал [0, 1] – в течение этого же временнóго интервала. Таким образом, подход из [Alper, Bridger, 1997] устраняет различие между прохождением открытого в конце пути интервала [0, 1) и прохождением замкнутого в конце пути интервала [0, 1]. Но это делается ценой отказа от (SBT), а такой отказ я полагаю неприемлемым.

***

При **второй концептуализации движения** с помощью исчисления бесконечно малых, использующих нильпотенты, как кажется, не делается выводов о неразличимости открытого интервала и его замыкания, о конечности количества вещественных чисел на невырожденном интервале и об отсутствии различий между открытыми и замкнутыми интервалами. Как показано в [Reeder, 2015] подход, использующий нильпотенты из кольца Джордано [Giordano, 2010] хорошо справляется с зеноновской апорией *Стрела*, поскольку «теперь» при этом подходе более не является моментом, а бесконечно малым интервалом времени. Но *Парадокс встречного движения* может быть сформулирован и при этом подходе, и вывод из него состоит в том, что Ахиллес и Гектор не встретятся ни в одной вещественной точке. То же можно сказать о подходе М. Вайта [White, 1982], (также анализируемом в [Reeder, 2015]; техника М. Вайта основывается на [Robinson, 1966]), где «теперь» тоже трактуется как бесконечно малый интервал, но для описания такого «теперь» используются не нильпотенты, а гиперреальные числа из нестандартного анализа. Таким образом, вторая концептуализация движения, в тех ее вариантах, которые рассматриваются в [Reeder, 2015], не помогает разрешить *Парадокс встречного движения*.

***

Замечу, что имеются и другие способы концептуализации движения, помимо рассмотренных. Например, можно считать, что

> «...объект может перемещаться сквозь непрерывное пространство, перескакивая через точки» [Antonopoulos, 2003, p. 505].

Далее К. Антонопулос утверждает, что движущиеся объекты совершают скачок из одного положения в другое, подобно тому, как объекты микромира, описываемые квантовой механикой, совершают квантовые скачки из одного состояния в другое, и если изменение состояния связано с перемещением, то объект микромира перемещается, не посещая промежуточные точки дистанции [Antonopoulos, 2003, p. 507]. И К. Антонопулос предлагает считать дискретными не пространство, не время, а перемещения [Antonopoulos, 2003, p. 508]. Также использовать квантовую механику для преодоления апорий Зенона предлагает О. Д. Николенко, который утверждает, что, например, перемещение Ахиллеса (в апории Зенона *Ахиллес и черепаха*), если Ахиллеса рассматривать как микрочастицу, подчиняющуюся законом квантовой механики, не может быть *аддивным*, т. е. итоговое смещение Ахиллеса не может представлять собой *бесконечную* сумму уменьшающихся смещений, которые строятся в *Ахиллесе и черепахе*. Указанная *неаддивность* движения Ахиллеса обусловлена «невозможностью локализации движущейся частицы внутри границ волнового пакета» [Nikolenko, 2012, p. 325].

Вероятно, при концептуализации движения с помощью законов квантовой механики не имеет смысла различать состояние Ахиллеса, прошедшего открытый в конце пути интервал, и состояние Ахиллеса, прошедшего замыкание этого интервала. Это означает, что при описанном использовании законов квантовой механики (SBT) отбрасывается и *Парадокс встречного движения* не может быть сформулирован. Однако *Парадокс встречного движения* формулируется для *классического* строго монотонного движения, и призван выявить трудности именно для *классической* концептуализации движения, в соответствии с которой временнóй интервал, в течение которого объект движется, а также пространственный интервал, по которому объект движется, представляют собой континуум, движущийся объект не перескакивает через точки, положение объекта во время движения определено точно, т. е. не может быть невырожденным вещественным интервалом.

8. Заключение

В настоящей статье было сделано следующее:

1. Была рассмотрена апория *Стрела* Зенона Элейского и указано на ее наиболее известное и пользующееся широким признанием решение в виде «at-at теории движения», предложенной Б. Расселом. Это решение состоит в определении движения посредством (RM).

2. Было предложено основывающееся на (RM) определение строго монотонного движения посредством (RM_m).

3. Было указано на недостатки (RM_m), состоящие в том, что (RM_m) не запрещает движущемуся точечному объекту делать «скачки», когда этот объект находится в таком состоянии, что он полностью преодолел интервал, открытый с того конца, который был пройден им последним. В этом состоянии точечный объект не находится во времени, но может находиться в произвольной точке пространства, сколь угодно удаленной от только что пройденных им пространственных точек.

4. Для того, чтобы устранить возможность совершения движущимся объектом скачков, было предложено исправить (RM_m), заменив его на (RM_{mi}). В (RM_{mi}) движение определяется не через соответствие моментов времени тем точкам, в которых находится движущийся точечный объект – как было в (RM) и в (RM_m), – а через соответствие временных интервалов, затраченных точечным объектом на прохождение пространственных интервалов, этим пространственным интервалам. Для того чтобы строго монотонное движение, определенное в (RM_{mi}), реализовалось, должно быть выполнено (SBT), т. е. точечному объекту должно быть запрещено пройти открытый интервал и его замыкание в течение одного и того же интервала времени. Положение (SBT) можно считать вариантом тезиса, отстаиваемого П. Бенацеррафом в примере об уменьшающемся демоне.

5. Но оказалось, что (RM_{mi}) имеет неожиданное следствие: можно предложить такое описание движения навстречу друг другу по одному и тому же отрезку двух движущихся точечных объектов, что эти объекты, хотя и посещают каждую точку этого отрезка, не встречаются друг с другом (т. е. не находятся в одной и той же пространственной точке в течение всего времени их движения).

6. Полученный в (5) результат является основанием для отбрасывания (RM_{mi}). Но, как было показано в (3), другое определение строго монотонного движения посредством (RM_m), основывающегося на (RM), также неприемлемо. Поскольку способы определения движения, не основывающиеся на (RM) и использующие анализ бесконечно малых, предлагают не менее парадоксальные решения, чем сами парадоксы Зенона, или не защищены от возникновения в рамках принимаемых теорий *Парадокса встречного движения*, следует заключить, что концептуализация движения до сих пор остается проблематичной.

Список литературы / References

Берестов, И. В. (2021a). Содержит ли современный анализ затруднений с зеноновскими последовательностями решение *Дихотомии*? *Respublica Literaria*. Т. 2. № 1. С. 28-36. DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.28-36

Berestov, I. V. (2021a). Does Contemporary Analysis of Difficulties with Zeno Sequences Contain a Solution to the *Dichotomy*? *Respublica Literaria.* Vol. 2. no. 1. pp. 28-36. DOI: 10.47850/RL.2021.2.1.28-36 (In Russ.)

Берестов, И. В. (2021b). Анализ действенности *Дихотомии* Зенона Элейского. *Respublica Literaria*. Т. 2. № 4. С. 27-42. DOI: 10.47850/RL.2021.2.4.27-42

Berestov, I. V. (2021b). A Soundness Analysis of Zeno's of Elea *Dichotomy*. *Respublica Literaria*. Vol. 2. no. 4. pp. 27-42. DOI: 10.47850/RL.2021.2.4.27-42 (In Russ.)

Берестов, И. В. (2021c). *Зенон Элейский в современных переводах и философских дискуссиях*. Новосибирск. Офсет-ТМ. (Сер. Античная философия и классическая традиция. Приложение к журналу ΣΧΟΛΗ. Т. V).

Berestov, I. V. (2021c). *Zeno of Elea in Contemporary Translations and Philosophic Discussions*. Novosibirsk. (In Russ.)

Alper, J. S., Bridger, M. (1997). Mathematics, Models and Zeno's Paradoxes. *Synthese*. Vol. 110. no. 1. pp. 143-165.

Antonopoulos, C. (2003). The Tortoise is Faster. *The Southern Journal of Philosophy*. Vol. 41. pp. 491-510.

Arsenijević, M., Šćepanović, S., Massey, G. J. (2008). A New Reconstruction of Zeno's *Flying Arrow*. *Apeiron*. Vol. 41. no.1. pp. 1-43.

Benacerraf, P. (2001). Tasks, Supertasks, and the Modern Eleatics. In Salmon, W. C. (ed.). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis. Hacklett. pp. 103-129. (Originally published in 1962.)

Bernstein, A., Wattenberg, E. (1969). Nonstandard Measure Theory. In uxemburg, W. A. J. (ed.). *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. New York. Holt, Rinehart and Winston. pp. 171-85.

Davis, M. (1983). Review of E. Nelson's "Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis". *Journal of Symbolic Logic*. Vol. 48. pp. 1203-1204.

Giordano, P. (2010). The Ring of Fermat Reals. *Advances in Mathematics*. Vol. 225. pp. 2050-2075.

Goldblatt, R. (1998). *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*. New York. Springer. XIV. 293 p.

Grünbaum, A. (2001). Zeno's Metrical Paradox of Extension. In Salmon, W. C. (ed.). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis. Hacklett. pp. 164-199. (Originally published in 1967.)

Harrison, C. (1996). The Three Arrows of Zeno: Cantorian and Non-Cantorian Concepts of the Continuum and of Motion. *Synthese*. Vol. 107. pp. 271-292.

Hurd, A. E., Loeb, P. A. (1985). *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. New York. Academic Press. xii. 232 p.

Nikolenko, O. D. (2012). The Nature of Physical Motion and Zeno's Paradox. *Physics Essays*. Vol. 25. no. 3. pp. 320-326.

Nelson, E. (1977). Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*. Vol. 83. no. 6. pp. 1165-1198.

McLaughlin, W. I., Miller, S. L. (1992). An Epistemological Use of Non-standard Analysis to Answer Zeno's Objections Against Motion. *Synthese*. Vol. 92. pp. 371-384.

Peijnenburg, J., Atkinson, D. (2008). Achilles, the Tortoise, and Colliding Balls. *History of Philosophy Quarterly*. Vol. 25. no. 3. pp. 187-201.

Reeder, P. (2015). Zeno's Arrow and the Infinitesimal Calculus. *Synthese*. Vol. 192. no. 5. pp. 1315-1335.

Robert, A. (1988). *Nonstandard Analysis*. New York. Wiley. xx. 156 p.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam. North-Holland Publ. Co. xi.

Russell, B. (2001). The Problem of Infinity Considered Historically. In Salmon, W. C. (ed.). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis. Hacklett. pp. 45-58. (From Russell, B. *Our Knowledge of External World*. Lecture 6. Originally published in 1914.)

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge (UK). CUP.

Thomson, J. (2001). Tasks and Super-Tasks. In *Zeno's Paradoxes*. Salmon, W. C. (ed.) Indianapolis. Hacklett. pp. 89-102 (Originally published in 1954.)

White, M. J. (1982). Zeno's Arrow, Divisible Infinitesimals, and Chrysippus. *Phronesis*. Vol. 27. no. 3. pp. 239-254.

Сведения об авторе / Information about the author

Берестов Игорь Владимирович – кандидат философских наук, старший научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail: berestoviv@yandex.ru, http://orcid.org/0000-0003-0782-761X

Статья поступила в редакцию: 09.11.2022
После доработки: 21.11.2022
Принята к публикации: 12.12.2022

Berestov Igor – Candidate of Philosophical Sciences, Senior Researcher of the Institute of Philosophy and Law of the Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolaeva str., 8, e-mail: berestoviv@yandex.ru, http://orcid.org/0000-0003-0782-761X

The paper was submitted: 09.11.2022
Received after reworking: 21.11.2022
Accepted for publication: 12.12.2022