УДК 165.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПРАКТИКА И МАТЕМАТИЕСКАЯ ЛОГИКА: К ИСТОРИИ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ

А. В. Хлебалин
Институт философии и права СО РАН (г. Новосибирск)
sasha_khl@mail.ru

Аннотация. В статье аннулируется роль практики развития математики XIX в. в становлении математической логики. Показано, что революционные преобразования математики XIX в., приведшие к увеличению абстрактности математических теорий и концепций, сопровождались ростом неопределенности в отношении стандартов доказательства, что породило универсальное распространению тревоги (Дж. Грей) как элемента математической практики. Утверждается, что этот элемент практики явился одним из источников возникновения математической логики, претендующей на то, чтобы придать строгость и точность математике. В статье аргументируется, что социально-эпистемологический анализ практики математики и становления математической логики позволит прояснить специфику развития отношений математики и математической логики.

Ключевые слова: математическая логика, символическая логика, математическая практика, доказательство.

Для цитаты: Хлебалин, А. В. (2021). Математическая практика и математическая логика: к истории взаимоотношений. *Respublica Literaria.* 2021.Т. 2. № 4. С. 83-89. DOI: 10.47850/RL.2021.2.4.93-99.

MATHEMATICAL PRACTICE AND MATHEMATICAL LOGIC: TO THE HISTORY OF RELATIONSHIP

A.V. Khlebalin
Institute of Philosophy and Law SB RAS (Novosibirsk)
sasha_khl@mail.ru

Abstract. The article annuls the role of practice in the development of mathematics in the 19th century in the formation of mathematical logic. It is shown that the revolutionary transformations of mathematics of the 19th century, which led to an increase in the abstractness of mathematical theories and concepts, was accompanied by an increase in uncertainty regarding the standards of proof, which led to the universal spread of anxiety (J. Gray) as an element of mathematical practice. It is argued that this element of practice was one of the sources of the emergence of mathematical logic, which claims to give rigor and accuracy to mathematics. The article argues that the socio-epistemological analysis of the practice of mathematics and the formation of mathematical logic will clarify the specifics of the development of relations between mathematics and mathematical logic.

Keywords: mathematical logic, symbolic logic, mathematical practice, proof.

For citation: Khlebalin, A. V. (2021). Mathematical Practice and Mathematical Logic: To the History of Relationship. *Respublica Literaria.* Vol. 2. no. 4. pp. 83-89. DOI: 10.47850/RL.2021.2.4.93-99.

Создание и развитие символической логики и то большое влияние, которое она намеревалась оказать на развитие как математики, так и философии, признается одним из аспектов революционных по своему масштабу изменений, произошедших в математике в течение последней четверти XIX – первой трети XX вв. Движение «концептуализации математики» и поиск ее оснований, в итоге обнаруживших «кризис» этих оснований, а также создание и развитие программ по преодолению этого кризиса преобразовали как саму математическую практику, так и ознаменовались формированием средств ее математического исследования. Сложно найти мнение, отрицающее революционный характер и масштаб этих событий.

Вместе с тем эти славные времена формирования и современной математики, и символической логики очень быстро обрели каноническую интерпретацию, которая – не будем ригористично утверждать, что непременно искажает, но позволим заметить, – упрощает историю возникновения, конкуренции и оформления концепций, наполнявших этот период. Формирование такой канонической интерпретации является очевидным признанием значимости соответствующих событий, но никак не приводит не только к единодушию в их оценке, но порою обнаруживает споры по самым, казалось бы, бесспорным своим положениям. Например, Дж. Грей свою критическую рецензию на объемный том по истории математики первой половины XX в. (под редакцией Ж-П. Пьера) начинает неожиданным заявлением: «Будет ли нам когда-нибудь известна история математики XX в.? Наиболее правдоподобным кажется ответ, что нам – точно нет». Критически оценивая эссе Гийома, Дж. Грей упоминает как хорошо известную истину, что результаты К. Геделя о неполноте «положили конец программе Гильберта по приданию строгости математике, а вместе с тем и сколько-нибудь серьезным обязательствам математиков в отношении математической логики и оснований математики» [Grey, 1996, p. 439]. После 30-х гг., как заявляет Дж. Грей, математическая логика превращается в узкую специальную область исследования, связь которой с математикой становится все незначительнее. Наглядной демонстрацией справедливости фактически разрыва отношений является, на его взгляд, безразличие Бурбаки ко всем этим темам.

На это замечание немедленно откликнулся Письмом к редактору, озаглавленным «Является ли математическая логика частью математики?», еще один корифей истории логики Г. Мур: «Комментарии Грея порождают в высшей степени вводящее в заблуждение впечатление об отношениях математической логики и остальной части математики после 1930-х гг. Эти отношения действительно “трудно прояснить”, но с 30-х гг. они становятся сильнее и глубже» [Moore, 1997, p. 210]. Прежде всего Г. Мур отмечает, что и до 30-х гг. многие математики игнорировали математическую логику; сами события, связанные с теоремами Геделя, не сыграли большой роли. И после них, и это вновь не связано с теоремами, известны примеры плодотворных и тесных взаимоотношений математики и математической логики, которые позволяют ему закончить Письмо следующими совами: «В общем, взаимосвязь математики и математической логики никогда не была столь сильной, как последние три десятилетия. Те, кто отмахиваются от этой взаимосвязи, демонстрируют устаревшие предубеждения, основанные на невежестве» [Moore, 1997, p. 212].

Дж. Грей в ответ на критику своего коллеги и друга, отмечает, что публикации мнений участников дискуссии предшествовала частная переписка, в которой участвовал и У. Ходжес, а Мура он называет не иначе как «Грег», – спеша разочаровать «любителей академических бурь в стакане воды», - и благодаря своих коллег-друзей за критику, которая теперь позволила ему более точно сформулировать мнение по обсуждаемому вопросу: «Позиция, которой я теперь придерживаюсь, заключается в том, что связь между математической логикой и математикой стала тоньше, но, тем самым, сильнее». [Grey, 1997, p. 454]. Дж. Грей приводит примеры такой специфической связи: использование теоремы компактности А. И. Мальцевым для доказательства результата о линейных группах, теорема Акса-Кочена-Ершова о разрешимости поля p-адических чисел. Он отмечает, что в существенной степени трактовка отношения математической логики и математики принципиально зависит от того, что понимается под логикой и математикой; например, У. Ходжес рассматривает алгебраическую геометрию как специальный случай теории моделей. Сам Грей отмечает и любезно благодарит коллег за то, что в результате обмена критическими замечаниями удалось выяснить, что взгляды на природу логики и математики у участников дискуссии во многом схожи. Но сам этот обмен критическими замечаниями и широта охвата обсуждаемых математических и логических примеров явно свидетельствуют в пользу оправданности замечания Грея, с которого начинается его рецензия, открывшая дискуссию: «Будет ли нам когда-нибудь известна история математики XX в.?».

Этот явно затянувшийся пример с дискуссией между одними из самых компетентных историков и философов логики свидетельствует о том, что хорошо известная и многократно рассказанная каноническая история рождения символической логики из духа оснований математики слишком обща и требует, если претендует не просто интерпретировать, но и объяснять историю математики и логики рубежа веков и первой трети XX в., большей детальности и одновременно расширения контекста истории оснований. В этом смысле социально-эпистемологические исследования практики математики позволяют обнаружить неожиданные и весьма тонкие взаимосвязи между, казалось бы, посторонними событиями: например, между проектом «концептуализации математики» и организацией ее преподавания в немецких университетах XIX в. [см.: Ferreiros, 2000].

Хорошо известно о тесном переплетении математических и философских контекстов в период становления и на первых этапах развития символической логики. Фактически ее возникновение – это вторжение математики на традиционную философскую территорию. Цели и концептуально-исторический контекст этого вторжения поможет нам прояснить изначальные намерения самого предприятия. Сам термин «символическая логика» был введен Дж. Венном для обозначения кардинальных преобразований, произошедших в XIX в. в логике и не имевших аналогов по своему масштабу прежде. Имеются в виду прежде всего алгебраические представления модусов силлогистической логики, стремительно увеличивающиеся благодаря концепции квантификации предикатов и логики отношений, развиваемых де Морганом; с другой стороны, развитие алгебры логики Дж. Булем, превосходившей силлогистику выразительной и дедуктивной силой. Логика подверглась существенной алгебраизации прежде всего за счет достижений именно XIX в.: дифференциальные операторы были важнейшими инструментами для Буля и функциональные уравнения, наиболее близко отвечавшие нуждам логики отношений, играли большую роль в логике де Моргана. Дальнейшее развитие этого направления связано с работами Э. Шредера.

Несмотря на то, что введенный Веном термин быстро прижился и прочно вошел в обиход, весьма скоро он начинает нуждаться в уточнении. Причиной этому явилось появление и развитие еще одного направления новой логики, которое не менее сильно отличалась от логики традиционной, но и очевидно не принадлежало алгебраической традиции. Его формирование связано с работами Г. Фреге и Д. Пеано, и само это направление было инспирировано не алгеброй, а математическим анализом и характеризовалось особенным акцентом на строгость и детальное представление доказательств в терминах развитой теории пределов. Идейным вдохновителем этого направления, которое подчеркивало важность строгости условиями истинности теорем и точности определений, был О. Л. Коши, а продолжателем – К. Вейерштрасс. Согласно Пеано, неточность языка является одной из очевидных проблем, препятствующих установлению должной точности, и он вводит символизацию не только для основных понятий математических теорий, но и для самой логики. Для обозначения результатов своей работы Пеано использовал термин «математическая логика», впервые введенный де Морганом в противовес «философской логике», не включающей символизацию. Этот термин получает распространение благодаря деятельности т. н. «пеанистов», образующих школу Дж. Пеано, и широкой известности проекта Б. Рассела, испытавшего, по его собственному признанию, большое влияние со стороны итальянской аксиоматической школы. Развитие этого направления было впечатляющим; если придание строгости математики и ее аксиоматизация, как максимальное ее воплощение, итальянскими логиками начиналось с установления двух типов символов – одного для логических, а другого – для математических, то в 1901 г. Б. Рассел ограничивается одним типом символов: математическая логика Пеано и обогащенная логикой отношений алгебра были достаточными не только для представления дедукции, но и математических объектов. Кульминацией развития этой стратегии явились *Principia mathematica*. По известному выражению, «Пеано облачил математику в логические одежды», а Б. Рассел претендовал на то, чтобы показать, что математика сводима к математической логике. Сторонники «символической логики» отправлялись в другом направлении, применяя математические средства в логике.

Оба эти направления существенно опираются на математические достижения XIX в., завися от контекста развития математики и даже претендуя на то, чтобы оказывать на него влияние. Развитие математики в XIX в. связано с ростом ее абстрактности и меньшей зависимостью от применения за пределами самой математики. Бесспорно, математика в XIX в. пережила существенные преобразования. Ее традиционная история характеризует этот период как время прогресса, когда совершаются открытия, до сих пор определяющие современную математику: увеличение строгости анализа, проективная геометрия, открытие неевклидовых геометрий, теория групп и т. д. Значимость этих достижений в истории математики породила представление о том, что в 1800 г. «математика родилась заново», перестав быть по преимуществу вычислениями и став концептуальной.

Вместе с тем «виговская» версия развития математики в XIX в. упускает важный аспект. Данный сюжет связан не с появлением отдельной новой теории или концепции, а, скорее, с осмыслением работающими математиками положения дел в своей дисциплине в позапрошлом столетии, своего рода, «духа математической практики». Впервые на эту атмосферу развития математики XIX в. указывает Дж. Грей: «… я не намерен умалять достижения стандартной модели [развития математики XIX в. – *А.Х.*], но усилить их другой нотой, поначалу колеблющейся, но возрастающей до крещендо в 1900–1914 гг. Эта нота – звук тревоги. Я подхожу к математике девятнадцатого века, рассматривая ее как отмеченную растущим осознанием ошибки» [Grey, 2004, p. 26].

Математика никогда не была терпимой к ошибкам. Вместе с тем, они являются неотъемлемой частью ее развития. Широко известен анекдот о том, как планируемое юбилейное издание важнейших работ Д. Гильберта пришлось отложить после того, как один из членов редакционной коллегии обнаружил ошибку в одной из ранее опубликованных работ юбиляра, и было решено перепроверить их все. Из-за количества ошибок и времени, потраченного на их устранение, издание пришлось отложить на три года – даже великие математики совершают ошибки. Но эти ошибки вычислительные. Те ошибки, страх которых пронизывает математику XIX в., иного рода. Прежде всего это страх отсутствия ясного понимания того, каким должно быть удовлетворительное доказательство: «Эта тревога по поводу подлинной природы доказательства сосуществовала с успешными доказательствами. Математики девятнадцатого века были в основном “крепкими парнями” и были способны занять позицию здравого смысла, когда, сталкиваясь с, казалось бы, философской дилеммой, заявляли, что “я не знаю, что такое доказательство, но я узнаю его, как только увижу”». [Grey, 2004, p. 27]. В этой ситуации бремя признания удовлетворительности предложенного доказательства ложилось на социальную практику и роль авторитетов. Так, Якоби утверждал: «Если Гаусс говорит, что он что-то доказал, это кажется очень правдоподобным; если это говорит Коши, скорее всего, это не так; если это сказал Дирихле, то это точно так и есть. Я бы с удовольствием обошелся без таких сложностей». А жена Дирихле вспоминает о том, как Якоби проводил часы с Дирихле «молча о математике. Они никогда не щадили друг друга, и Дирихле часто говорил ему горькую правду. Якоби хорошо это понимал и заставлял свой блестящий ум склониться перед репутацией великого Дирихле» [цит. по: Grey, 2004, p. 38]. Отсутствие представления о критериях удовлетворительного доказательства явно дезорганизовывало математическую практику. Это особенно заметно в случае оценки представленных результатов. Здесь классическим примером являются трудности с восприятием и распространением неевклидовых геометрий Бойяи и Лобачевского наряду с непрекращающимися попытками «доказать» постулат о параллельных прямых.

Увеличение абстрактности математики в XIX в., сопровождаемое нарастанием и распространением тревоги в отношении надежности и применимости традиционных практик доказательств в новых областях, породили хорошо известное в виговской истории математики стремление к ее строгости и точности. Этими устремлениями и руководствовались представители математической логики, в частности школа Д. Пеано. Кульминацией этих устремлений можно рассматривать проект метаматематики Д. Гильберта и П. Бернайса. Драматической развязкой этой истории традиционно считаются теоремы Геделя о неполноте; Дж. Грей ими же датирует фактическое исчезновение влияния математической логики на математику.

Вновь, на наш взгляд, здесь будут уместны уточнения. Традиционная оценка значимости теорем о неполноте интерпретируется как непосредственное опровержение основных направлений в области оснований математики, прежде всего логицизма и формализма, противостояние которых определяло, в том числе, и те события на теперь уже эпохальном собрании в Кенигсберге 1930 г. Интересным здесь является то, что на самом конгрессе фактически никто, за исключением Дж. Фон Неймана, не придал никакого значения выступлениям К. Геделя. Распространение сведений и признание значимости этих результатов связано с именами тех же фон Неймана, А. Френкеля, Р. Карнапа и др. Но вместе с тем, оно не было повсеместным; интересным здесь является тот факт, что *A system of logistic* У. Куайна (1934) не содержали никакого упоминания о результатах Геделя. И. Граттан-Гуинесс сообщает, что С. Мак Лэин, который учился в 1931–1933 гг. в Геттингене под руководством Г. Вейля, рассказывал, что за время его прибывания там ни П. Бернайс, ни Г. Генцен не обсуждали результаты Геделя с ним, хотя и консультировали его по проблеме структуры математического доказательства. Можно утверждать, что за редкими исключениями математики не были взволнованы результатами о неполноте К. Геделя. Во многом это объясняется тем, что эти результаты основываются на гораздо более строгом понятии доказательства, чем те, с которыми имеет дело работающий математик. Кроме того, математический интерес к теоремам о неполноте связан не с тем, что «теория оказывается неполной, таковы большинство из них», а состоит «скорее в том, что неполнота относится к настолько простым теориям» [Grattan-Guiness, 2000, p. 161].

Различие во влиянии, которое теоремы о неполноте оказали на философию математики, математическую логику и практику математики, бесспорно. Оно лишний раз свидетельствует о том, что отношения между этими дисциплинами, которые по-разному были источниками возникновения и развития математической логики, далеки от картины «тесного, плодотворного» сотрудничества, которая предполагается виговской историей математики и математической логики. История их взаимодействия и взаимовлияния, как и причины, вызвавшие их истощение, видимо, не может быть рассмотрена исключительно как последовательность сменяющих друг друга концепций и результатов. По крайне мере, мы пытались показать, что социально-эпистемологический анализ может существенно продвинуться в объяснении природы той связи математической логики и математики, которая, по выражения Дж. Грея, «стала тоньше, но тем самым, сильнее».

Список литературы / References

Ferreiros, J. (2000). *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhauser Verlag AG. 466 pp.

Grattan-Guiness, I. (2000). Mathematics and Symbolic Logic: Some Notes on an Uneasy Relationship. *History and Philosophy of Logic*. Vol. 20. pp. 159-167.

Grey, J. (1996). Review of Development of Mathematics, 1900-1950. Edited by Jean-Paul Pier. Basel / Boston / Berlin (Birkhauser-Verlag). 1994. 729 pp. *Historia Mathematica*. Vol. 23. pp. 437-446.

Grey, J. (1997). Letter to the Editor. Reply to “Is Mathematical Logic a Part of Mathematics?”. *Historia Mathematica*. Vol. 24. pp. 454-456.

Grey, J. (2004). Anxiety and Abstraction in Nineteenth-Century Mathematics. *Science in Context*. Vol. 17.no. 1-2. pp 23-47.

Moore G. H. (1997). Letter to the Editor. Is Mathematical logic a Part of Mathematics? *Historia Mathematica*. Vol. 24. pp. 210-212.

Сведения об авторе / Information about the author

Хлебалин Александр Валерьевич – кандидат философских наук, зам. директора по научной работе Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Николаева, 8, e-mail: sasha_khl@mail.ru, http://orcid.org/0000-0002-3536-3974.

Статья поступила в редакцию: 18.10.2021
После доработки: 27.10. 2021
Принята к публикации: 01.11.2021

Khlebalin Aleksandr – Candidate of Philosophy, Deputy Director for Research of the Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Nikolayev Str., 8, e-mail: sasha_khl@mail.ru, http://orcid.org/0000-0002-3536-3974.

The paper was submitted: 18.10.2021
Received after reworking: 27.10.2021
Accepted for publication: 01.11.2021